ثانوية الجولان التأهيلية – بيوكرى – 2010 – 2011

السنة الثانية علوم رياضية :

مادة الرياضيات: سلسلة التمارين رقم 11 الأستاذ مومني

حساب الاحتمالات و المتغير العشوائي

التمرين رقم 01:

نريد توزيع 6 كرات $B_6;B_5;B_4;B_3;B_2;B_1$ بكيفية عشوائية على 3 حفر A وB و C بحيث تحتوي كل حفرة على كرتين.

1 – أحسب عدد التوزيعات الممكن

2 – أحسب احتمال تواجد الكرتين B_1 و B_2 في الحفرة A

3 – أحسب احتمال تواجد الكرتين B_1 و B_2 في حفرتين مختلفتين

4 – أحسب احتمال تواجد الكرات المرقمة زوجيا في 3 حفر مختلفة

....

التمرين رقم 02:

% 40 من ساكنة إحدى المدن الكندية يتكلمون اللغة الفرنسية
من بين السكان الذين يتكلمون الفرنسية % 15 يدخنون و %30 يمارسون الرياضة
من بين السكان الذين لا يتكلمون الفرنسية% 20 يدخنون و %10 يمارسون الرياضة
لا أحد من ساكنة هذه المدينة يدخن ويمارس الرياضة في آن واحد
التقينا صدفة بأحد سكان هذه المدينة
ما هو الاحتمال لكي يكون هدا الشخص
1 – يتكلم الفرنسية ويمارس الرياضة
2 – يدخن ولا يتكلم الفرنسية
3 – يمارس الرياضة

....

التمرين رقم 03:

نعتبر نردا أوجهه الستة تحمل الأرقام 1 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2 وصندوقا بداخله 6 كرات سوداء و 4 كرات بيضاء .
نرمي هذا النرد مرتين متتاليتين و ليكن n مجموع الرقمين اللذين عينهما.
إذا كان n عددا زوجيا نسحب من الصندوق n كرة تآنيا
إذا كان n عددا فرديا نسحب من الصندوق n كرة بالتتابع وبدون إحلال
1 – أحسب احتمال الحصول على كرتين سوداوين فقط
2 – أحسب احتمال عدم الحصول على أي كرة سوداء
3 – أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما عدد فردي علما أننا حصلنا على كرتين سوداوين فقط

التمرين رقم 04:

يعمل ثلاثة عمال O_1 و O_2 و O_3 بالتتابع في وحدة لتصنيع قطع آلية.

العامل O_1 يصنع 2000 قطعة منها 40 قطعة غير صالحة

العامل O_2 يصنع 1800 قطعة منها 90 قطعة غير صالحة

العامل O_3 يصنع 2200 قطعة منها 88 قطعة غير صالحة

1 – نختار بشكل عشوائي 5 قطع من بين 1800 قطعة مصنوعة من طرف العامل O_2.

أحسب احتمال أن تكون 2 من القطع الخمس غير صالحة في حالة السحب بالتتابع و بإحلال وفي حالة السحب التآني

2 – في الإنتاج الكلي للعمال الثلاث نختار قطعة بشكل عشوائي

ما هو الاحتمال إذا كانت القطعة صالحة أن تكون مصنوعة من طرف العامل O_2

التمرين رقم 05:

في حصة تدريبية يريد حارس مرمى التصدي لعدد من ضربات الترجيح المتتالية.
نتائج هذا الاختبار كانت على الشكل التالي:

- إذا تصدى الحارس للضربة رقم n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ فاحتمال تصديه للضربة رقم n + 1 هو 0,8
- إذا لم يصدى للضربة رقم n فاحتمال تصديه للضربة رقم n + 1 هو 0,6
- احتمال التصدي للضربة الأولى هو 0,7

ليكن A_n الحدث التالي: " الحارس تصدى للضربة رقم n " و $p_n(A_n)$

1 – a – أحسب $p\left(A_{n+1}/A_n\right)$ و $p\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right)$

b – عبر عن $p\left(A_{n+1}\cap A_n\right)$ و $p\left(A_{n+1}\cap\overline{A_n}\right)$ بدلالة p_n

c – استنتج أن: $p_{n+1}=\dfrac{2}{10}p_n+\dfrac{6}{10}$

2 – لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $U_n = p_n - \dfrac{75}{100}$

a – بين أن $\left(U_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها

b – حدد p_n بدلالة n و أستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

التمرين رقم06:

قام 10 أساتذة بتحضير 20 موضوعا لإحدى المباريات بحيث حضر كل واحد منهم موضوعين.
وضعت المواضيع في 20 ظرفا. شارك في هذه المبارة مرشحين، يختار كل واحد منهما موضوعين بشكل عشوائي بحيث أن الموضوعين المختارين من طرف المرشح الأول لا يمكن إعادة اختيارهما من طرف الثاني.

ليكن A_i حيث $i \in \{1,2\}$ الحدث التالي: " الموضوعين المختارين من طرف المرشح رقم i حضرا من طرف نفس الأستاذ"

1 – بين أن $p\left(A_1\right)=\dfrac{1}{19}$

2 – a – أحسب $p\left(A_2/A_1\right)$

b – بين أن احتمال "اختيار كل مرشح لموضوعين حضرا من طرف نفس الأستاذ" هو $\dfrac{1}{323}$

3 – a – أحسب $p\left(A_2/\overline{A_1}\right)$

b – باستعمال صيغة الاحتمالات الكلية أحسب $p\left(A_2\right)$

c – استنتج أن $p\left(A_1\cup A_2\right)=\dfrac{33}{323}$

4 – أحسب $p\left(\overline{A_1}/A_2\right)$

تمرين رقم 07 :

يحتوي كيس S_1 على 5 كرات 3 منها تحمل الرقم 1 وكرتان تحملان الرقم0

1 – نسحب بالتتابع وبدون احلال كرتين من الكيس S_1

أحسب احتمال أن يكون مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين هو 1

2 – نسحب تآنيا 3 كرات من الكيس S_1

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الأرقام التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة

a – حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

b – حدد و أنشئ دالة التجزئ للمتغير العشوائي X

3 – يحتوي كيس S_2 على عدد من الكرات لا يمكن التميز بينهما باللمس : % 20 منها تحمل الرقم 1 و 80 % تحمل الرقم 0

نعتبر التجربة العشوائية التالية : نسحب من الكيس S_1 3 كرات تآنيا ثم نسحب من الكيس S_2 بالتتابع و بإحلال عددا من الكرات يساوي مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة من الكيس S_1

أحسب احتمال كل من الحدثين

A = " مجموع أرقام الكرات المسحوبة من S_1 يساوي مجموع أرقام الكرات المسحوبة من S_2"

B = " مجموع أرقام الكرات المسحوبة من S_1 و من S_2 هو 4 "

....

تمرين رقم 08 :

يحتوي كيس على 4 كرات حمراء و 6 كرات بيضاء لا يمكن التميز بينهما باللمس . نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الكيس و نعتبر الحدث A التالي :

A: "عدد الكرات الحمراء المسحوبة أكبر من عدد الكرات البيضاء المسحوبة ".

I) نفترض أن سحب الكرات الثلاث يتم في آن واحد .

1) ما هو عدد الإمكانيات ؟

2) بين أن : $p(A)=\frac{1}{3}$

II) نفترض أن سحب الكرات الثلاث يتم بالتتابع وبدون بإحلال .

1) ما هو عدد الإمكانيات .

2) احسب احتمال الحدث A .

III) نفترض أن سحب الكرات الثلاث يتم بالتتابع و بإحلال .

1) ما هو عدد الإمكانيات ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) ما هي القيم التي يأخذها المتغير X ؟

ب) احسب $p\left(X=0\right)$ و $p\left(X=1\right)$

ج) استنتج احتمال الحدث A .

....

التمرين رقم 09 :

يحتوي صندوق U_1 علي 3 بيد قات مرقمة 0 , 0 , 2

و يحتوي صندوق U_2 علي 4 بيد قات مرقمة 1 , 1 ,3 , 4 .

لتكن $\left(E\right)$ التجربة العشوائية التالية :

نسحب بيدقة واحدة من كل صندوق .

و ليكن x المتغير العشوائي المرتبط بالتجربة $\left(E\right)$ و الذي يساوي جداء الرقمين المسحوبين .

1- a- حدد قانون احتمال المتغير x

b- حدد دالة التجزئ F للمتغير x

2- نعيد التجربة $\left(E\right)$ 3 مرات مع إعادة البيدقة المسحوبة إلي الصندوق الذي سحبت منه

احسب احتمال الأحداث التالية :

A= " الحصول مرتين بالضبط علي (جداء أكبر من 4) "

B= " الحصول مرة واحدة علي الأكثر علي جداء أكبر من 4 "
C= " الحصول مرة واحدة علي الأقل علي (جداء أصغر من 3) "
3- نقوم بإعادة التجربة (E) عدة مرات مع إرجاع كل بيدقة مسحوبة إلي مكانها الأصلي و في كل سحبة نقوم بحساب x
فإذا كانت قيمة x هي 0 نتوقف عن السحب
ليكن P_n احتمال التوقف عن السحب في المرة رقم n
a- احسب p_1 و P_2 و P_3 و P_n (n عدد صحيح طبيعي من $\mathbb{N}^*$)
b- احسب احتمال عدم القيام بالسحبة رقم $n+1$.

....

تمرين رقم 10 :

أجريت دراسة إحصائية في معمل لصناعة نوع من الآلات الكهربائية و أسفرت عن النتائج التالية:
الآلات المصنوعة تحمل نوعين من العيب D_1 و D_2
احتمال أن تحمل آلة كهربائية العيب D_1 هو 0.005 و احتمال أن تحمل العيب D_2 هو 0.01
نفترض أن العيبين غير مستقلين و أن احتمال D_1 علما أن D_2 محقق هو 0.25

I) احسب احتمال الأحداث التالية:
1) آلة كهربائية تحمل العيبين
2) آلة كهربائية تحمل عيب علي الأقل
3) آلة لا تحمل أي من العيبين D_1 و D_2

II) نسحب 12 آلة بالتتابع و بإحلال . احسب احتمال الحصول على الأقل علي 11 آلة صالحة

III) في عملية شراء 1000 آلة نريد تقييم الاحتمال p_0 لكي تكون 982 آلة على الأقل صالحة
1) ليكن x المتغير العشوائي الذي يربط كل كمية من 1000 آلة مأخوذة من الإنتاج بعدد الآلات الصالحة من هذه الكمية
نفترض أن قانون x هو قانون حداني عوامله n = 1000 و P = 0.9875
أحسب الأمل الرياضي و المغايرة للمتغير العشوائي x
2) أكتب بدون حساب تعبيرا للاحتمال P_0

....

تمرين رقم 11 :

يحتوي صندوق U_1 علي كرتين تحملان الحرفين A و G و يحتوي صندوق U_2 علي كرتين مرقمتين بالعددين 3 و 5
ويحتوي صندوق ثالث U_3 علي كرتين تحملان العددين $\frac{1}{2}$ و 2
نسحب كرة من كل صندوق و نعرف متتالية عددية كما يلي:
(نرمز لهده المتتالية ب (V))
- (V) متتالية هندسية إذا سحبنا الكرة G من الصندوق U_1 و تكون هده المتتالية حسابية إذا تم سحب الكرة A من الصندوق U_1
- الكرة مسحوبة من الصندوق U_2 تحدد الحد الأول V_0 للمتتالية
- الكرة المسحوبة من الصندوق U_3 تحدد أساس المتتالية (V)

1) أحسب احتمال الحصول على
a) متتالية حسابية
b) متتالية متقاربة
c) متتالية حدها V_4 عبارة عن عدد صحيح طبيعي زوجي
d) متتالية غير متقاربة و هندسية

2) نسحب كرة من كل صندوق و نحدد متتالية (V) و اللعبة التالية: - إدا كانت (V) متتالية هندسية نربح 5 دراهم
- إدا كانت (V) متتالية حسابية و $V_4 \leq 7$ نخسر 4 دراهم
- إدا كانت (V) متتالية حسابية و $V_4 \rangle 7$ نخسر 6 دراهم
ليكن x المتغير العشوائي المرتبط بالربح و الخسارة في هده اللعبة
a) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي x
b) احسب الأمل الرياضي و المغايرة للمتغير العشوائي x

تمرين رقم 12 :

I) تحتوي كيس علي 6 بيدقات تحمل الأرقام 0 , 1 , 1 , 1 , x ,x حيث x عدد حقيقي يخالف 0 و1 و-1
نحسب تأنيا و عشوائيا 3 بيدقات من الكيس نسجل أرقامها ثم نعيدها إلي الكيس و نعيد هذه التجربة عدة مرات
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث بيدقات بجداء الأرقام التي تحملها هده البيدقات
1- ما هو قانون احتمال المتغير العشوائي X
2- احسب بدلالة x الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X و حدد x إدا علمت أن $E(x) = 1.25$
II) نقوم بإضافة ثلاث بيدقات أخرى إلي الكيس و نعيد ترقيمها حيث تصبح البيدقات مرقمة من 1 إلي 9
نسحب 3 بيدقات عشوائيا و في آن واحد نسجل أرقامها و نعيدها إلي الكيس
ليكن Y المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة من ثلاث بيدقات بعدد الأعداد الفردية التي تحملها هذه البيدقات
1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي Y
2) نقوم بعشر اختبارات متتالية
أحسب احتمال الأحداث التالية :
a) الحصول علي الأقل على عددين فردين و عدد زوجي
b) الحصول 4 مرات على عددين فرديين و عدد زوجي

....

تمرين رقم 13:

يحتوي كيس على a كرة بيضاء و a كرة حمراء . نجري سلسلة من السحبات :
في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الصندوق إدا كانت حمراء نتوقف عن السحب و إذا كانت بيضاء نعيدها إلي الصندوق و نسحب كرة أخرى و هكذا دواليك .
لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الحدث A_n : " الكرة المسحوبة في السحبة n حمراء "
و نضع $P_n = P(A_n)$
1) أحسب P_1 و P_2
2) a) اثبت أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$ فإن $P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} P_i\right)$
b) استنتج P_n بدلالة n
3) ليكن q_n الاحتمال لكي لا نجري السحبة رقم n
a) بين أن $q_n = 1 - 2p_n$
b) استنتج q_n بدلالة n

....

تمرين رقم 14 :

يحتوي صندوق U_1 علي 3 بيد قات مرقمة 0 , 0 , 2
و يحتوي صندوق U_2 علي 4 بيد قات مرقمة 1 , 1 ,3 , 4 .
لتكن (E) التجربة العشوائية التالية :
نسحب بيدقة واحدة من كل صندوق .
و ليكن x المتغير العشوائي المرتبط بالتجربة (E) و الذي يساوي جداء الرقمين المسحوبين .
1- a- حدد قانون احتمال المتغير x
b- حدد دالة التجزئ F للمتغير x
2- نعيد التجربة (E) 3 مرات مع إعادة البيدقة المسحوبة إلي الصندوق الذي سحبت منه . احسب احتمال الأحداث التالية
A= " الحصول مرتين بالضبط علي (جداء أكبر من 4) "
B= " الحصول مرة واحدة علي الأكثر علي جداء أكبر من 4 "
C= " الحصول مرة واحدة علي الأقل علي (جداء أصغر من 3) "
3- نقوم بإعادة التجربة (E) عدة مرات مع إرجاع كل بيدقة مسحوبة إلي مكانها الأصلي و في كل سحبة نقوم بحساب x
فإذا كانت قيمة x هي 0 نتوقف عن السحب
ليكن P_n احتمال التوقف عن السحب في المرة رقم n
a- احسب p_1 و P_2 و P_3 و P_n (n عدد صحيح طبيعي من $\mathbb{N}^*$)
b- احسب احتمال عدم القيام بالسحبة رقم $n+1$.