الاحتمالات

التمرين الأول

يحتوي كيس على n كرة حمراء و $2n$ كرة خضراء . نسحب بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الكيس .

1) أحسب احتمال الحدثين : A " سحب أربع كرات حمراء " و B " الحصول على الأقل على كرة حمراء "

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل إمكانية بمجموع النقط المحصل عليها . عند سحب كرة حمراء نحصل على 1+ و في حالة سحب كرة خضراء نحصل على 1- . حدد قانون احتمال X أحسب الأمل الرياضي

التمرين الثاني :

يحتوي صندوق على ثلاث كرات سوداء و كرتين بيضاوين . نسحب بالتتابع و دون احلال الكرات من الصندوق

1) أحسب احتمال الحدثين : A " الكرة الأولى و الثانية بيضاوين " و B " كل كرتين متتابعتين من لونين مختلفين "

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل امكانية بعدد الكرات البيضاء المسحوبة قبل ظهور اول كرة بيضاء . ما هي قيم المتغير X ثم حدد قانون احتمال X

التمرين الثالث :

ليكن k عدد طبيعي أكبر أو يساوي 1

يحتوي كيس على $5k$ كرة بيضاء و $3k$ كرة حمراء . نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد و نعتبر الحدث E_k "عدد الكرات الحمراء المسحوبة أكبر قطعا من عدد الكرات البيضاء المسحوبة " و نضع $p_k = p(E_k)$

1) أحسب p_1 و p_k ثم حدد $\lim\limits_{k \to +\infty} p_k$

2) نسحب بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الكيس و نضع $q_k = p(E_k)$ أحسب q_1 ثم q_k ماذا تلاحظ ؟

التمرين الرابع :

ليكن n عددا طبيعيا أكبر أو يساوي 20 . يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $n-10$ كرة سوداء نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها للكيس . نكرر هذه التجربة n مرة .

نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0 \le k \le n)$

1) أحسب p_k بدلالة n و k

2) نضع $U_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث $k \in \{0,1,.....,n-1\}$

أ- بين أن $U_k = \dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{10}{n-10}$

ب- بين أن : $U_k \ge 1 \Leftrightarrow 0 \le k \le 9$ و $U_k \le 1 \Leftrightarrow 10 \le k \le n-1$

ج- استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما تتغير k في $\{0,1,.....,n\}$ و بين أن $M = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{10^{10}}{10!} \times \dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

التمرين الخامس :

يحتوي صندوق على أربع كرات . كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس.

نسحب كرة من الصندوق و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق . نجري التجربة لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون و نتوقف . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة

1) أحسب احتمال كل من الحدثين $[X = 2]$ و $[X = 3]$

2) ليكن k عدد صحيح طبيعي غير منعدم

بين أن احتمال الحدث $[X = 2k]$ هو $p_{2k} = \dfrac{5}{8}\left(\dfrac{3}{16}\right)^{k-1}$ و احتمال الحدث $[X = 2k+1]$ هو $p_{2k+1} = \left(\dfrac{3}{16}\right)^{k}$