

حساب الاحتمالات

تمرين 1

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرة حمراء.

نسحب من الصندوق 4 كرات .
حدد في كل حالة

أ- عدد السحبات الممكنة ؟

ب- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء فقط ؟

ج- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأقل ؟

د- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأكثر ؟

1- تأنيا 2- بالتتابع بإحلال 3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تأنيا

أ- عدد السحبات الممكنة

$$\text{card } \Omega = C_9^4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

ب- نعتبر الحدث A : " الحصول على كرة سوداء فقط "

$$\text{card}A = C_3^1 \times C_6^3 = 3 \times 20 = 60$$

ج- نعتبر الحدث B : " الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$$\text{card}B = C_3^1 \times C_6^3 + C_3^2 \times C_6^2 + C_3^3 \times C_6^1 = 3 \times 20 + 3 \times 15 + 6$$

$$\text{card}B = 111$$

\overline{B} : عم الحصول على أي كرة سوداء : $\text{card } \overline{B} = C_6^4 = 15$

$$\text{card}B = 126 - 15 = 111$$

د- نعتبر الحدث C : " الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$$\text{card}C = C_3^1 \times C_6^3 + C_6^4 = 60 + 15 = 75$$

2- بالتتابع بإحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$\text{card } \Omega = 9^4 = 6561$$

ب- نعتبر الحدث A : " الحصول على كرة سوداء فقط "

$$A : C_4^1 nqqq$$

$$\text{card}A = 4 \times 3 \times 6^3$$

$$\text{card}A = 2592$$

ج- نعتبر الحدث B : " الحصول على كرة سوداء على الأقل "

\overline{B} : عم الحصول على أي كرة سوداء : $\text{card } \overline{B} = 6^4 = 1296$

$$\text{card}B = 1296 - 6561 = 5265$$

د- نعتبر الحدث C : " الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$$A : C_4^1 nqqq \text{ أو } qqqq$$

$$\text{card}C = 2592 + 1296 = 3888$$

3- بالتتابع بدون إحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$\text{card } \Omega = A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

ب- نعتبر الحدث A : " الحصول على كرة سوداء فقط "

$$A : C_4^1 n q q q$$

$$card A = 4 \times 3 \times A_6^3$$

$$card A = 1440$$

ج- نعتبر الحدث B : " الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$$\bar{B} : \text{ع م الحصول على أي كرة سوداء} : card \bar{B} = A_6^4 = 360$$

$$card B = 3024 - 360 = 2664$$

د- نعتبر الحدث C : " الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$$A : C_4^1 n q q q \text{ أو } q q q q$$

$$card C = 1440 + 360 = 1800$$

تمرين 2

من الأرقام : 2-3-4-5-6-7 كون عددا من ثلاثة أرقام .

أ - كم من عدد زوجي يمكن تكوينه ؟

ب- كم من عدد قابل للقسمة على 5 يمكن تكوينه ؟

الحل

$$\text{أ - } q q p : 6 \times 6 \times 3$$

$$\text{ب - } q q 5 : 6 \times 6 \times 1$$

تمرين 3

أ - كم يوجد من عدد مكون من 5 أرقام ؟

ب - من بين هذه الأعداد كم يوجد من عدد يحتوي على رقم زوجي على الأقل ؟

الحل

$$\text{أ - } 9 \times 10^4$$

ب - عدد الأعداد الذي لا يحتوي على أي رقم زوجي : 5^5

عدد الأعداد الذي يحتوي على رقم زوجي على الأقل :

$$9 \times 10^4 - 5^5$$

الاحتمال

تمرين 4

يحتوي صندوق على 3 قطع نقدية

نسحب واحدة ثم نرميها ونسحب أخرى ثم نرميها

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الوجه F

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$$card \Omega = C_3^1 \times 2 \times C_2^1 \times 2 = 24$$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الوجه F "

\bar{A} : " عدم ظهور الوجه F "

$$card \bar{A} = C_3^1 \times 1 \times C_2^1 \times 1 = 6$$

$$card A = card \Omega - card \bar{A} = 24 - 6 = 18$$

$$p(A) = \frac{18}{24}$$

تمرين 5

يحتوي صندوق على 3 نرود

نسحب واحدا ثم نرميه ونسحب آخر ثم نرميه

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$$card \Omega = C_3^1 \times 6 \times C_2^1 \times 6 = 216$$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الرقم 4 "

\bar{A} : " عدم ظهور الرقم 4 "

$$card \bar{A} = C_3^1 \times 5 \times C_2^1 \times 5 = 150$$

$$card A = card \Omega - card \bar{A} = 216 - 150 = 66$$

$$p(A) = \frac{66}{216}$$

تمرين 6

نرمي نردين في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$$card \Omega = C_6^1 \times C_6^1 = 36$$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الرقم 4 "

\bar{A} : " عدم ظهور الرقم 4 "

$$card \bar{A} = 5 \times 5 = 25$$

$$card A = card \Omega - card \bar{A} = 36 - 25 = 11$$

$$p(A) = \frac{11}{36}$$

تمرين 7

يحتوي صندوق على 3 نرود

نختار تائيا نردين ثم نرميها في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$$card \Omega = C_3^2 \times 6 \times 6 = 108$$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الرقم 4 "

\bar{A} : " عدم ظهور الرقم 4 "

$$card \bar{A} = C_3^2 \times 5 \times 5 = 75$$

$$card A = card \Omega - card \bar{A} = 108 - 75 = 33$$

$$p(A) = \frac{33}{108}$$

تمرين 9

يحتوي كيس A على كرتين صفراوين و 3 كرات خضراء و 5 كرات حمراء و يحتوي كيس B على 4 كرات خضراء نسحب تانيا كرتين من الكيس A و نضعهما في الكيس B ثم نسحب تانيا كرتين من الكيس B احسب احتمال الحصول على كرتين خضراوين بالضبط

الحل

$$\text{card } \Omega = C_{10}^2 \times C_6^2 = 675$$

نعتبر الحدث C : "الحصول على كرتين خضراوين بالضبط"

$$q = R \text{ ou } J$$

$2q$ puis \mathcal{V} ou q et \mathcal{V} puis \mathcal{V} ou \mathcal{V} puis \mathcal{V} : C

$$\text{card } C = C_7^2 \times C_4^2 + C_7^1 \times C_3^1 \times C_5^2 + C_3^2 \times C_6^2$$

$$\text{card } C = 381$$

$$p(A) = \frac{381}{675}$$

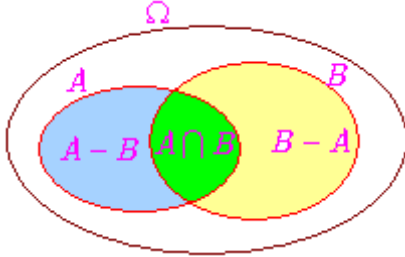
تمرين 10

A و B حدثان بحيث :

$$P(A \cap B) = 1/6; P(B) = 1/4; P(A) = 1/3$$

احسب : $P_A(\bar{B}); P_A(B); P(\bar{A} \cup \bar{B}); P(A \cup \bar{B}); P(A \cup B)$

الحل



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{12}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup \bar{B}) = \frac{11}{12}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

تمرين 8

يحتوي كيس على 10 بيدات تحمل الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 مكتوبة بالأحمر ؛ 5 ؛ 6 ؛ 7 مكتوبة بالأزرق ؛ 8 ؛ 9 مكتوبة بالأصفر ؛ ...

الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 مكتوبة بالأحمر

الأرقام : 5 ؛ 6 ؛ 7 مكتوبة بالأزرق

الأرقام : 8 ؛ 9 مكتوبة بالأصفر

حدد في كل حالة الاحتمال لتكون :

أ- الأرقام زوجية ؟

ب- الأرقام لها نفس اللون ؟

1- تانيا 2- بالتتابع بإحلال 3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تانيا

$$\text{card } \Omega = C_{10}^3 = 120$$

أ- نعتبر الحدث A : "الأرقام زوجية"

$$\text{card } A = C_5^3 = 10$$

$$p(A) = \frac{10}{120}$$

ب- نعتبر الحدث B : "الأرقام لها نفس اللون"

$$\text{card } B = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$$

$$p(B) = \frac{11}{120}$$

2- بالتتابع بدون إحلال

$$\text{card } \Omega = A_{10}^3 = 720$$

أ- نعتبر الحدث A : "الأرقام زوجية"

$$\text{card } A = A_5^3 = 60$$

$$p(A) = \frac{60}{720}$$

ب- نعتبر الحدث B : "الأرقام لها نفس اللون"

$$\text{card } B = A_5^3 + A_3^3 = 60 + 6 = 66$$

$$p(B) = \frac{66}{720}$$

3- بالتتابع بإحلال

$$\text{card } \Omega = 10^3$$

أ- نعتبر الحدث A : "الأرقام زوجية"

$$\text{card } A = 5^3$$

$$p(A) = \frac{5^3}{10^3} = \frac{1}{8}$$

ب- نعتبر الحدث B : "الأرقام لها نفس اللون"

$$\text{card } B = 5^3 + 3^3 + 2^3 = 125 + 27 + 8 = 160$$

$$p(B) = \frac{160}{1000} = \frac{4}{25}$$

$$\text{card}(B) = 3 \times 2 + 6 \times 3 = 24$$

$$p(B) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3} \text{ أو مباشرة}$$

$$p(B) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8}$$

$$p(B) = \frac{1}{3}$$

إذن:

الحدث $A \cap B$: "الأولى سوداء والثانية حمراء"
NR

$$P(A \cap B) = \frac{6 \times 3}{9 \times 8} \text{ إذن:}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

ومنه :

$$P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ نعلم أن:}$$

$$P_A(B) = \frac{3}{8} \text{ إذن:}$$

ب- A و B غير مستقلان

لأن: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

أو لأن: $p_A(B) \neq p(B)$

$$P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \text{ ج- نعلم أن:}$$

$$P_B(A) = \frac{3}{4}$$

إذن:

نعلم أن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

إذن:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B - A) \text{ نعلم أن:}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \text{ و:}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \text{ إذن:}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{12}$$

ومنه :

تمرين 12

يتكون مجتمع من 60% من الرجال و 40% من النساء

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

تمرين 11

يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء.
نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال.

نعتبر: الحدث A : "الكرة الأولى سوداء"
الحدث B : "الكرة الثانية حمراء"

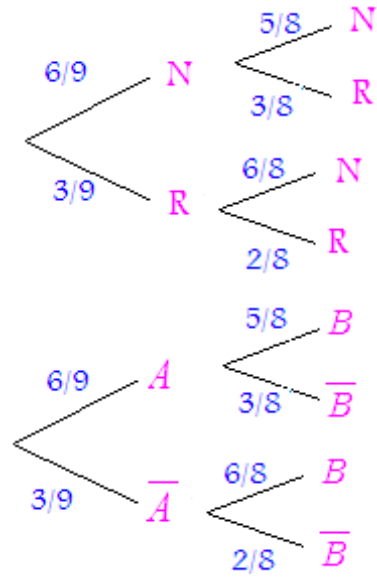
أ- حدد: $P(A \cap B); P(B); P(A)$

ب- هل A و B مستقلان؟

ج- احسب: $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P_B(A)$

الحل

الطريقة 1: باستعمال شجرة الاحتمالات



أو

$$P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

$$P(B) = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

الطريقة 2: بدون استعمال شجرة الاحتمالات

$$\text{card}\Omega = 9 \times 8 = 72 \text{ أ-}$$

الحدث A : NX (سوداء أو حمراء)

$$\text{card}(A) = 6 \times 8 = 48$$

$$p(A) = \frac{2}{3}$$

$$p(A) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3} \text{ أو مباشرة}$$

الحدث B : NR أو RR

20% من الرجال يتكلمون الإنجليزية و 10% من النساء يتكلمون الإنجليزية

اخترنا عشوائيا شخصا من هذا المجتمع

ما هو الاحتمال لكي يكون هذا الشخص

أ - رجلا و يتكلم الإنجليزية ؟

ب- رجلا و لا يتكلم الإنجليزية ؟

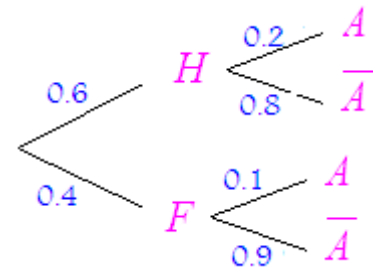
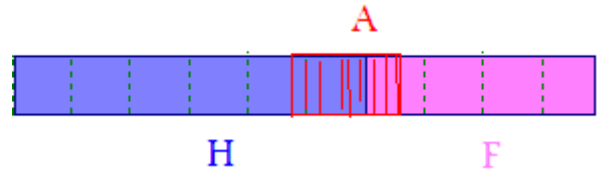
ج - امرأة و تتكلم الإنجليزية ؟

د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن

يكون امرأة ؟

الحل

$$(H \cap A) \cap (F \cap A) = \emptyset, A = (H \cap A) \cup (F \cap A)$$



$p(H) = 0.6$ رجل: H

$p(F) = 0.4$ امرأة: F

انجليزية: A

$$P_F(A) = 0.1, P_H(A) = 0.2$$

أ - رجل و يتكلم الإنجليزية : $p(A \cap H)$

$$p(A \cap H) = P_H(A) \times p(H) = 0.2 \times 0.6 = 0.12$$

$$p(A \cap H) = 0.12$$

ب- رجل و لا يتكلم الإنجليزية : $p(\bar{A} \cap H)$

$$p(\bar{A} \cap H) = P(H) - P(A \cap H) = 0.6 - 0.12$$

$$p(\bar{A} \cap H) = 0.48$$

أ : $p(\bar{A} \cap H) = P_H(\bar{A}) \times p(H) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

ج - امرأة و تتكلم الإنجليزية : $p(A \cap F)$

$$p(A \cap F) = P_F(A) \times p(F) = 0.1 \times 0.4 = 0.04$$

$$p(A \cap F) = 0.04$$

د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن

يكون امرأة ؟ : $P_A(F)$

$$p(A) = p(H)P_H(A) + p(F)P_F(A)$$

$$p(A) = p(A \cap H) + p(A \cap F) \quad \text{أو}$$

$$p(A) = 0.16$$

$$P_A(F) = \frac{p(A \cap F)}{p(A)} = \frac{0.04}{0.16}$$

$$P_A(F) = 0.25$$

تمرين 13

يحتوي صندوق على قطعة نقدية m_1 غير مغشوشة

و قطعة m_2 سجل على وجهها F و قطعة m_3

بحيث احتمال الحصول على الوجه F هو $\frac{1}{3}$

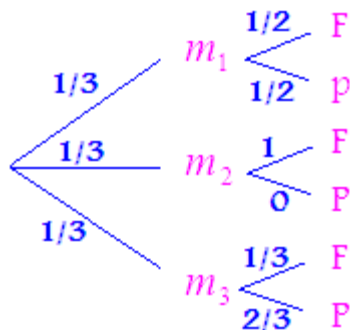
نسحب عشوائيا قطعة من الصندوق ثم نرميها

1- احسب احتمال الحصول على الوجه F

2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون

القطعة المسحوبة هي m_3

الحل



$$P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = \frac{1}{3}$$

$$P_{m_3}(F) = \frac{1}{3}, P_{m_2}(F) = 1, P_{m_1}(F) = \frac{1}{2}$$

$$P(F) = P(m_1)P_{m_1}(F) + P(m_2)P_{m_2}(F) + P(m_3)P_{m_3}(F) \quad \text{1-}$$

$$P(F) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$P(F) = \frac{11}{18}$$

2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون

القطعة المسحوبة هي m_3 : $P_F(m_3)$

$$p_{m_3}(F) = \frac{p(m_3 \cap F)}{p(m_3)} \Rightarrow p(m_3 \cap F) = p_{m_3}(F)p(m_3)$$

$$p(m_3 \cap F) = \frac{1}{9}$$

$$P_F(m_3) = \frac{p(m_3 \cap F)}{p(F)} = \frac{1}{9} \times \frac{18}{11}$$

$$P_F(m_3) = \frac{2}{11}$$

من الصندوق C_2 : $P_A(C_2)$

$$p_{C_2}(A) = \frac{p(C_2 \cap A)}{p(C_2)} \Rightarrow p(C_2 \cap A) = p_{C_2}(A)p(C_2)$$

$$p(C_2 \cap A) = \frac{1}{5}$$

$$P_A(C_2) = \frac{p(C_2 \cap A)}{p(A)} = \frac{1}{5} \times \frac{120}{65}$$

$$P_A(C_2) = \frac{24}{65}$$

المتغيرات العشوائية

تمرين 15

نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات

التي يظهر فيها الوجه P "

1- حدد $card\Omega$ ؛ $X(\Omega)$

2- حدد قانون احتمال X

3- احسب : $\sigma(X)$; $V(X)$; $E(X)$

4- حدد دالة التجزئ ثم مثلها

الحل

$$card\Omega = 2^3 = 8 \quad -1$$

$$\Omega = \{FFF; FFP; FPF; PFF; FPP; PFP; PPF; PPP\}$$

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{8} \quad \text{إذن } (X=0) = \{FFF\} \quad -2$$

$$(X=1) = \{FFP; FPF; PFF\}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8} \quad \text{إذن}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{8} \quad ; \quad P(X=2) = \frac{3}{8} \quad \text{نجد}$$

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \quad -3$$

$$E(X) = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2$$

تمرين 14

يحتوي صندوق C_1 على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_2 على 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_3 على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء

نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرتا

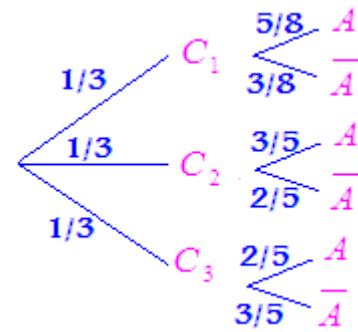
نفترض أن لجميع الصناديق و جميع الكرات نفس الاحتمال

1- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون

من الصندوق C_2 ؟

الحل



نعتبر الحدث C_i : اختيار الصندوق C_i $1 \leq i \leq 3$

$$1 \leq i \leq 3 \quad p(C_i) = \frac{1}{3}$$

1- نعتبر الحدث A : الحصول على كرة بيضاء

$$p_{C_3}(A) = \frac{4}{10} \quad \text{و} \quad p_{C_2}(A) = \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad p_{C_1}(A) = \frac{5}{8}$$

$$p(A) = p(C_1)p_{C_1}(A) + p(C_2)p_{C_2}(A) + p(C_3)p_{C_3}(A)$$

$$p(A) = \frac{65}{120}$$

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون

-2 حساب : $\sigma(X); V(X); E(X)$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{2}{10} + 5 \times \frac{2}{10} + 6 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{10}$$

$$E(X) = 4$$

$$V(X) = \frac{1}{10} \times (1-4)^2 + \frac{1}{10} \times (2-4)^2 + \frac{2}{10} \times (3-4)^2 + \frac{2}{10} \times (4-4)^2 + \frac{2}{10} \times (5-4)^2 + \frac{1}{10} \times (6-4)^2 + \frac{1}{10} \times (7-4)^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3} \quad ; \quad V(X) = 3$$

-3 دالة التجزئ F

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \in]-\infty; 1] \\ F(x) = \frac{1}{10} & x \in]1; 2] \\ F(x) = \frac{2}{10} & x \in]2; 3] \\ F(x) = \frac{4}{10} & x \in]3; 4] \\ F(x) = \frac{6}{10} & x \in]4; 5] \\ F(x) = \frac{8}{10} & x \in]5; 6] \\ F(x) = \frac{9}{10} & x \in]6; 7] \\ F(x) = 1 & x \in]7; +\infty[\end{cases}$$

تمرين 17

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 12 سوداء و 3 حمراء .

نسحب 8 كرات بالتتابع بإحلال

نعتبر الحدث B : " الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط "

احسب : $P(B)$

نعتبر : X : " عدد المرات التي تكون فيها الكرة بيضاء "

احسب : $V(X)$ ؛ $E(X)$ ؛ $P(X = 6)$

الحل

مباشرة :

B هو : $C_8^6 b b b b b b q q$

q من بين : $R; N$ و عددهم : 15

$$card B = C_8^6 5^6 15^2 \quad ; \quad card \Omega = 20^8$$

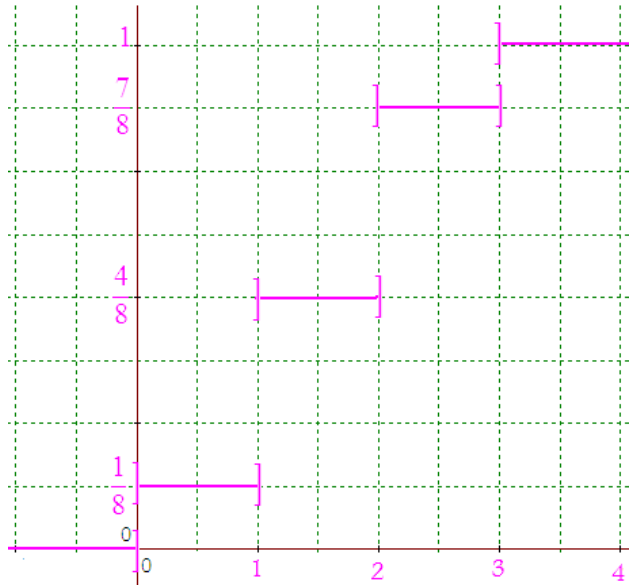
$$P(B) = \frac{C_8^6 5^6 15^2}{20^8}$$

$$P(B) = C_8^6 \left(\frac{5}{20}\right)^6 \left(\frac{15}{20}\right)^2$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{3}{4}$$

-4 دالة التجزئ F

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \in]-\infty; 0] \\ F(x) = \frac{1}{8} & x \in]0; 1] \\ F(x) = \frac{4}{8} & x \in]1; 2] \\ F(x) = \frac{7}{8} & x \in]2; 3] \\ F(x) = 1 & x \in]3; +\infty[\end{cases}$$



تمرين 16

يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة من 0 إلى 4

سحبنا في آن واحد كرتين من الكيس .

X : المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الرقمين المحصل عليهما .

1 - حدد قانون احتمال X

2- احسب : $\sigma(X); V(X); E(X)$

3- حدد دالة التجزئ ثم مثلها

الحل

$$card \Omega = C_5^2 = 10$$

$$X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

باستعمال المتغير العشوائي الحداني

الاختبار هو سحب كرة واحدة .

يعاد الاختبار $n = 8$ مرة .

A : " الحصول على كرة بيضاء "

B : " وقوع A $k = 6$ مرة "

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{8-6}$$

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n = 8$ و $p = \frac{1}{4}$

$$E(X) = 8 \times \frac{1}{4}$$

$$V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

تمرين 18

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2 حمراء.

نسحب من الصندوق 5 كرات .

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بمجموع الكرات البيضاء "

الحدث A : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

1- حدد : $X(\Omega)$

2- احسب : $card A$ $p(X = 2)$ في كل حالة :

أ- تأنيا ب - بالتتابع بإحلال ج - بالتتابع بدون إحلال

الحل

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

2-

$$card\Omega = C_{11}^5$$

نعتبر الحدث \bar{A} : " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

$$card\bar{A} = C_6^5$$

لدينا :

$$card A = C_{11}^5 - C_6^5$$

إذن:

$$p(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_6^3}{C_{11}^5}$$

ب - السحب بالتتابع بإحلال : $card\Omega = 11^5$

نعتبر الحدث \bar{A} : " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

$$card\bar{A} = 6^5$$

لدينا :

$$card A = 11^5 - 6^5$$

إذن:

$$p(X = 2) = C_5^2 \left(\frac{5}{11}\right)^2 \left(\frac{6}{11}\right)^3$$

$$p(X = 2) = C_5^2 \frac{5^2 6^3}{11^5}$$

أو :

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال : $card\Omega = A_{11}^5$

نعتبر الحدث \bar{A} : " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

$$card\bar{A} = A_6^5$$

لدينا :

$$card A = A_{11}^5 - A_6^5$$

إذن:

$$p(X = 2) = C_5^2 \frac{A_5^2 A_6^3}{A_{11}^5}$$

تمرين 19

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 20

يحتوي كيس على 10 كرة بيضاء و $n - 10$ كرة سوداء

نسحب كرة من الكيس نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس

نكرر التجربة n مرة

p_K هو احتمال الحصول على k كرة بيضاء $0 \leq k \leq n$

1- احسب : p_K بدلالة n و k

$$2- \text{نضع : } u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \quad 0 \leq k \leq n - 1$$

$$a- \text{بين أن : } u_k = \frac{n - k}{k + 1} \times \frac{10}{n - 10}$$

$$b- \text{بين أن : } 0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$$

$$10 \leq k \leq n - 1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$$

ج- استنتج أكبر قيمة M للعدد p_K $0 \leq k \leq n$

$$\text{و بين أن : } M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n - 10)^{n - 10}}{(n - 10)!}$$

الحل

$$1- p_K = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n - 10}{n}\right)^{n - k}$$

$$2- 0 \leq k \leq n - 1 \quad u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$$

$$a- u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n - k}{k + 1}$$

تمرين 20

نوزع 3 كرات مرقمة من 1 إلى 3 على 5 صناديق
 $E; D; C; B; A$ كل صندوق يمكن أن يحتوي على 3 كرات
 X : المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الصناديق المملوءة
 حدد قانون احتمال X

الحل

$$\text{card}(\Omega) = 5^3 = 125$$

$$3-0-0-0-0 : X = 1$$

$$\text{card}(X = 1) = C_5^1 = 5$$

$$p(X = 1) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$$

$$2-1-0-0-0 : X = 2$$

$$\text{card}(X = 2) = C_3^2 \times C_5^1 \times C_1^1 \times C_4^1 = 60$$

$$p(X = 2) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$$

$$1-1-1-0-0 : X = 3$$

$$\text{card}(X = 3) = C_3^3 \times C_5^3 \times A_3^3 = 60$$

$$p(X = 3) = \frac{12}{25}$$

$X(\Omega)$	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/25	12/25	12/25

تمرين 21

X متغير عشوائي بحيث : $x(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

F دالة تجزئ X بحيث : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \frac{1}{35}$

$$F(3) - F(1) = \frac{6}{7} ; F(2) = \frac{13}{35}$$

1- حدد قانون احتمال X

2- حدد دالة التجزئ F

الحل

1- نعتبر : $p_i = P(X = i)$

نعلم أن : $F(x) = p_0 \quad x \in]0; 1]$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = p_0$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \frac{1}{35}$ فإن : $p_0 = \frac{1}{35}$

$$F(3) - F(1) = (p_0 + p_1 + p_2) - p_0 = p_1 + p_2$$

بما أن : $F(3) - F(1) = \frac{6}{7}$ فإن : $p_1 + p_2 = \frac{6}{7}$

$$F(2) = p_0 + p_1$$

$$u_k = \frac{C_n^{k+1} \left(\frac{10}{n}\right)^{k+1} \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-(k+1)}}{C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}}$$

$$u_k = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{10}{n-10}$$

ب- نبين أن : $0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$

$$u_k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{10}{n} + 9$$

بما أن : $n \geq 20$ فإن : $\frac{10}{n} \leq \frac{1}{2}$

$$u_k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{10}{n} + 9 \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{2} + 9$$

بما أن : $k \in \mathbb{N}$ فإن : $u_k \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 9$

$$0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$$

- نبين أن : $10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$

بنفس الطريقة

$$u_k \leq 1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{2} + 9$$

بما أن : $k \in \mathbb{N}$ و $k \leq n-1$

فإن : $u_k \leq 1 \Leftrightarrow n-1 \geq k \geq 10$

$$10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$$

ج- بما أن : $0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$

فإن : $0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow p_{k+1} \geq p_k$

$$p_{10} \geq p_9 \geq \dots \geq p_0$$

بما أن : $10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$

فإن : $10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow p_k \geq p_{k+1}$

$$p_{10} \geq p_{11} \geq \dots \geq p_n$$

أكبر قيمة M للعدد p_K هي $0 \leq k \leq n$

$$M = C_n^{10} \left(\frac{10}{n}\right)^{10} \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10}$$

$$M = \frac{n!}{(n-10)! 10!} \left(\frac{10}{n}\right)^{10} \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10}$$

$$M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5-0-0-0 \rightarrow 4 = 4 \\ 4-1-0-0 \rightarrow C_5^4 \times 4 \times 3 = 60 \\ 3-2-0-0 \rightarrow C_5^3 \times 4 \times 3 = 120 \\ 3-1-1-0 \rightarrow C_5^3 \times 4 \times C_3^2 \times 2! = 240 \\ 2-2-1-0 \rightarrow C_5^1 \times 4 \times C_3^2 \times C_4^2 = 360 \\ 2-1-1-1 \rightarrow C_5^5 \times 4 \times 3! = 240 \end{array} \right\} = 1024$$

$$\text{card}(\Omega) = 2^6 = 64 \quad m = 2; n = 6 \text{ -4}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6-0 \rightarrow 2 = 2 \\ 5-1 \rightarrow C_6^5 \times 2 = 12 \\ 4-2 \rightarrow C_6^4 \times 2 = 30 \\ 3-3 \rightarrow C_6^3 = 20 \end{array} \right\} = 64$$

$$\text{card}(\Omega) = 3^6 = 729 \quad m = 3; n = 6 \text{ -5}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6-0-0 \rightarrow 3 = 3 \\ 5-1-0 \rightarrow C_6^5 \times 3 \times 2 = 36 \\ 4-2-0 \rightarrow C_6^4 \times 3 \times 2 = 90 \\ 4-1-1 \rightarrow C_6^4 \times 3 \times 2! = 90 \\ 3-2-1 \rightarrow C_6^3 \times 3 \times C_3^2 \times 2 = 360 \\ 3-3-0 \rightarrow C_3^2 \times C_6^3 = 60 \\ 2-2-2 \rightarrow C_6^2 \times C_4^2 = 90 \end{array} \right\} = 729$$

$$\text{card}(\Omega) = 4^8 = 65536 \quad m = 4; n = 8 \text{ -6}$$

$$\left. \begin{array}{l} 8-0-0-0 \rightarrow 4 = 4 \\ 7-1-0-0 \rightarrow C_8^7 \times 4 \times 3 = 96 \\ 6-2-0-0 \rightarrow C_8^6 \times 4 \times 3 = 336 \\ 6-1-1-0 \rightarrow C_8^6 \times 4 \times C_3^2 \times 2! = 672 \\ 5-3-0-0 \rightarrow C_8^5 \times 4 \times 3 = 672 \\ 5-2-1-0 \rightarrow C_8^5 \times 4 \times C_3^2 \times 3 \times 2 = 4032 \\ 5-1-1-1 \rightarrow C_8^5 \times 4 \times 3! = 1344 \\ 4-4-0-0 \rightarrow C_4^2 \times C_8^4 = 420 \\ 4-3-1-0 \rightarrow C_8^4 \times 4 \times C_4^3 \times 3 \times 2 = 6720 \\ 4-2-2-0 \rightarrow C_8^4 \times 4 \times C_3^2 \times C_4^2 = 5040 \\ 4-2-1-1 \rightarrow C_8^4 \times 4 \times C_4^2 \times 3 \times 2! = 10080 \\ 3-3-2-0 \rightarrow C_8^2 \times 4 \times C_3^2 \times C_6^3 = 6720 \\ 3-3-1-1 \rightarrow C_4^2 \times C_8^2 \times 2! \times C_6^3 = 6720 \\ 3-2-2-1 \rightarrow C_8^3 \times 4 \times C_5^1 \times 3 \times C_4^2 = 20160 \\ 2-2-2-2 \rightarrow C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 = 2520 \end{array} \right\} = 65536$$

ملاحظة

$$p_0 + p_1 = \frac{13}{35} \quad \text{فإن } F(2) = \frac{13}{35} \quad \text{بما أن}$$

و لدينا حسب قانون الاحتمال :

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

نجد :

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

-2

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = 0 \quad x \in]-\infty; 0] \\ F(x) = \frac{1}{35} \quad x \in]0; 1] \\ F(x) = \frac{13}{35} \quad x \in]1; 2] \\ F(x) = \frac{31}{35} \quad x \in]2; 3] \\ F(x) = 1 \quad x \in]3; +\infty[\end{array} \right.$$

تمرين 22

نوزع n قرص مرقمة من 1 إلى n على m صندوق
 A_1, \dots, A_m كل صندوق يمكن أن يحتوي على n قرص
 X : المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الصناديق المملوءة.
 في كل حالة حدد قانون احتمال X

$$m = 3; n = 5 \text{ -2} \quad m = 2; n = 4 \text{ -1}$$

$$m = 2; n = 6 \text{ -4} \quad m = 4; n = 5 \text{ -3}$$

$$m = 4; n = 8 \text{ -6} \quad m = 3; n = 6 \text{ -5}$$

الحل

$$\text{card}(\Omega) = 2^4 = 16 \quad m = 2; n = 4 \text{ -1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4-0 \rightarrow 2 = 2 \\ 3-1 \rightarrow C_4^3 \times 2 = 8 \\ 2-2 \rightarrow C_4^2 = 6 \end{array} \right\} = 16$$

$$\text{card}(\Omega) = 3^5 = 243 \quad m = 3; n = 5 \text{ -2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5-0-0 \rightarrow 3 = 3 \\ 4-1-0 \rightarrow C_5^4 \times 3 \times 2 = 30 \\ 3-2-0 \rightarrow C_5^3 \times 3 \times 2 = 60 \\ 3-1-1 \rightarrow C_5^3 \times 3 \times 2! = 60 \\ 2-2-1 \rightarrow C_5^1 \times 3 \times C_4^2 = 90 \end{array} \right\} = 243$$

$$\text{card}(\Omega) = 4^5 = 1024 \quad m = 4; n = 5 \text{ -3}$$

2- احسب احتمال ظهور رقم فردي
الحل

$$P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6} \quad -1$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

إذن :

$$P(1) + 2P(1) + 3P(1) + 4P(1) + 5P(1) + 6P(1) = 1$$

$$P(1) = \frac{1}{21}; P(2) = \frac{2}{21}; P(3) = \frac{3}{21}$$

$$P(4) = \frac{4}{21}; P(5) = \frac{5}{21}; P(6) = \frac{6}{21}$$

2- الحدث A : ظهور رقم فردي

$$P(A) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$P(A) = \frac{9}{21}$$

عدد الكيفيات لتوزيع pn قرص على p خانة بحيث كل خانة تحتوي على n قرص بالضبط

$$\underbrace{n-n-\dots-n-n}_{p \text{ fois}} \rightarrow C_{pn}^n \times C_{(p-1)n}^n \times \dots \times C_{2n}^n$$

أمثلة :

- توزيع 4 أقرص على 2 خانة بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقرص بالضبط

$$2-2 \rightarrow C_4^2 = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} 12-34 \\ 13-24 \\ 14-23 \end{array} \right\} \times 2 = \frac{C_4^2}{2} \times 2$$

- توزيع 6 أقرص على 2 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 3 أقرص بالضبط

$$3-3 \rightarrow C_6^3 = 20$$

$$\left. \begin{array}{l} 123-456 \\ 124-356 \\ 125-346 \\ 126-345 \\ 134-256 \\ 135-246 \\ 136-245 \\ 145-236 \\ 146-235 \\ 156-124 \end{array} \right\} \times 2 = \frac{C_6^3}{2} \times 2$$

- توزيع 6 أقرص على 3 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقرص بالضبط

$$2-2-2 \rightarrow C_6^2 \times C_4^2 = 90$$

$$\left. \begin{array}{l} 12-34-56 \\ 13-26-45 \\ 14-25-36 \\ 15-24-36 \\ 16-23-45 \end{array} \right\} \frac{C_6^2}{3} \times 3! + \left. \begin{array}{l} 12-36-45 \\ 12-35-46 \end{array} \right\} \frac{C_6^2}{3} \times 3! + \left. \begin{array}{l} 12-35-46 \end{array} \right\} \frac{C_6^2}{3} \times 3!$$

- توزيع 8 أقرص على 4 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقرص بالضبط

$$2-2-2-2 \rightarrow C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 = 2520$$

- توزيع 8 أقرص على 2 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 4 أقرص بالضبط

$$4-4 \rightarrow C_8^4 = 70$$

تمرين 23

نرمي نردًا وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 بحيث احتمالات ظهور وجوهه متناسبة مع الأرقام التي تحملها

1- احسب احتمال ظهور كل وجه