

التمرين 1 : أحسب التكاملات التالية :

$$\int_0^4 x|x-2| dx \text{ و } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos^2(x) dx \text{ و } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) \sin^3(x) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+2\sin(t)} dt \text{ و } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)+\sin(2t)}{1+\sin(2t)} dt \text{ و } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$$

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx \text{ و } \int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x} dx \text{ و } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

التمرين 2 :

1. حل المعادلة التالية : $x \in \mathbb{R} ; e^x + e^{-x} = 2,5$

2. أحسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1}$

3. أ- أحسب التكامل : $I = \int_1^2 \frac{2}{4+t^2} dt$

ب- استنتج قيمة التكامل : $J = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$

(يمكن وضع : $t = \sqrt{e^x-1}$)

التمرين 3 :

1. أ- أحسب : $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$

ب- حدد على \mathbb{R} دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ج- باستعمال المكاملة بالأجزاء ؛ أحسب : $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

2. أحسب : $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+2} dx$ (يمكن وضع : $t = e^x - 1$)

التمرين 4 :

1. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$

2. استنتج قيمة التكامل : $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$

التمرين 5 :

1. باستعمال المكاملة بالأجزاء ؛ أحسب التكامل التالي :

$$I = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$$

2. استنتج التكامل التالي : $J = \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2+1}-x) dx$

التمرين 6 :

أ- باستعمال المكاملة بتغيير المتغير ؛ أحسب التكامل التالي :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ (يمكن وضع : } t = x + \sqrt{1+x^2} \text{)}$$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء ؛ استنتج التكامل : $J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$

2. أحسب التكامل التالي : $K = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

التمرين 7 :

1. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\}; \frac{t}{2t^2+3t-2} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{t+2} + \frac{1}{2t-1} \right)$

2. أحسب التكامل التالي : $I = \int_1^4 \frac{tdt}{2t^2+3t-2}$

3. استنتج قيمة التكامل : $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

يمكن استعمال مكاملة بتغيير المتغير ($t = \sqrt{3x+1}$) .

التمرين 8 :

1. أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}; x^2+x+1 = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]$

ب- بين باستعمال طريقة تغيير المتغير ؛ واضعاً $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ ؛ أن :

$$I := \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\pi}{12}$$

2. أ- تحقق من أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; \frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)}$$

ب- أحسب التكامل : $\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx$

3. أحسب ؛ باستعمال المكاملة بالأجزاء ؛ التكامل :

$$K = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{(2x+1)\ln(x)}{(x^2+x+1)^2} dx$$

التمرين 9 : أحسب التكاملات التالية :

و $J = \int_{-2}^0 (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} dx$ و $I = \int_1^2 \frac{x^4-3x^3+2}{x^2} dx$

و $L = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx$ و $K = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-2}{4}} (x+1)\sin(2x+1) dx$

التمرين 10 :

1. أحسب التكامل التالي : $I = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx$

2. أوجد دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$

3. باستعمال المكاملة بالأجزاء ؛ أحسب : $\int_1^2 \frac{x \ln(x)}{(x^2+1)^2} dx$

(لاحظ أن : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$)

التمرين 11 :

1. أحسب التكامل التالي : $I = \int_0^{\pi} (1 + \sin(2x))^2 dx$

2. أ- أحسب التكامل : $K = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $J = \int_0^1 x^2 \text{Arc tan}(x) dx$

التمرين 12 :

1. أحسب : $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (يمكن وضع : $t = \sqrt{x}$)

2. أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{1+e^x}$

ب- أحسب : $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$

ج- باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^{\ln 2} e^{-x} \ln(1+e^{-x}) dx$

التمرين 13 :

1. تحقق أن : $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} : \frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}$

2. أحسب التكامل التالي : $\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)^2} dt$

3. استنتج قيمة التكامل : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{(e^x+1)^2} dx$ (يمكن وضع $t = e^x$)

التمرين 14 :

1. تحقق أن : $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1\} : \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$

2. أحسب التكامل التالي : $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

3. بين أن : $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = 2I$ (يمكنك وضع : $t = \sqrt{x}$)

4. باستعمال المكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$

التمرين 15 :

1. بين أن : $\int_2^3 \frac{t}{t-1} dt = 1 + \ln 2$

2. أحسب : $\int_5^{10} \frac{1+\sqrt{x-1}}{x-2} dx$ (يمكنك وضع : $t = \sqrt{x-1}$)

التمرين 16 :

1. أحسب التكامل : $I = \int_0^2 |2x-1| dx$

2. بوضعك $t = e^x$ ؛ أحسب التكامل : $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 3e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

(لاحظ أن : $\frac{t^2+3}{t(t^2+1)} = \frac{3}{t} - \frac{2t}{t^2+1}$)

التمرين 17 :

1. أحسب التكامل : $I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} |\ln x| dx$

2. أ- أوجد العددين a و b بحيث يكون $\frac{2t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$ لكل عدد حقيقي t يخالف -1 .

ب) أحسب التكامل : $J = \int_2^7 \frac{1}{1+\sqrt{2+x}} dx$

(يمكن وضع $t = \sqrt{2+x}$)**التمرين 18 :**

1. حدد دالة أصلية للدالة : $u : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

2. باستعمال مكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^{\ln 2} \frac{(x+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} dx$

التمرين 19 :

1. أحسب التكامل : $I = \int_{-2}^0 \frac{dx}{1+2e^x}$ (يمكنك وضع $t = e^{-x}$)

2. باستعمال مكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $J = \int_{-\ln 2}^0 e^{-x} \ln(1+2e^x) dx$

التمرين 20 :

1. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

2. أحسب : $\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$

3. باستعمال مكاملة بالأجزاء؛ أحسب : $\int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3} dx$

التمرين 21 : ليكن $a > 0$ ولتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[-a, a]$

1. بين أنه إذا كانت f دالة زوجية؛ فإن : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

2. بين أنه إذا كانت f دالة فردية؛ فإن : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

3. استنتج حساب التكاملين التاليين :

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)| dx$ و $J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(x) \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

التمرين 22 :لتكن f دالة متصلة على \mathbb{R} ودورية دورها T .

1. بين أن : $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

2. أحسب التكامل : $I = \int_{\frac{2005\pi}{3}}^{\frac{2008\pi}{3}} |\sin(x)| dx$

التمرين 23 :أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_n$ في كل من الحالات التالية :

أ- $u_n = \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{2n+p}$ ؛ ب- $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-p^2}}$

ج- $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{p}{n^2} \sin(p\pi)$