التمرين رقم 1

أحسب التكاملات التالية : $\int_1^2 x e^{x^2}\,dx$ ، $\int_1^{\ln 3} \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}}\,dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x\,dx$

، $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ ، $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^3}dt$ ، $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ، $\int_{-1}^{0} \frac{x^4}{x^2+1}dx$

التمرين رقم 2

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ما يلي : $\int_1^2 \frac{\ln\left(1+x\right)}{x^2}dx$ ، $\int_0^1 x\ln\left(x+1\right)dx$ ، $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

$\int_1^2 \frac{\arctan x}{x^2}dx$ ، $\int_1^2 \left(3-2x\right)\ln x\,dx$ ، $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (حدد مشتقة $x \to \sqrt{x^2+1}$)

التمرين رقم 3

باستعمال تغيير المتغير أحسب ما يلي : $\int_0^1 \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx$ ضع $t=x^2$ ، $\int_1^2 \frac{\sqrt{2t-1}}{t}\,dt$ ضع $x=\sqrt{2t-1}$

$\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\,dx$ ضع $t=\sqrt{x-1}$ ، $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ ضع $t=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ ضع $t=\tan\frac{x}{2}$ ، $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1-x}}\,dx$ ضع $x=\cos t$ و $t\in\left[0,\pi\right]$

التمرين رقم 4

نعتبر التكامليين $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$

1) بين أن $I=J$ يمكن وضع $t=\frac{\pi}{2}-x$

2) استنتج قيمة كل من I , J

التمرين رقم 5

1) تحقق أن $\left(1-x\right)^3+\left(1+x\right)^3=2+6x^2$

2) استنتج قيمة التكامل : $\int_0^{\pi}\left(\sin^6 t+\cos^6 t\right)dt$

التمرين رقم 6

1) تحقق أن $\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}=1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

2) أحسب التكامل : $I=\int_0^1 \frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx$

3) أ- حدد دالة أصلية للدالة $x \to \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء حدد $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x e^x}{\left(e^x+1\right)^3} dx$

التمرين رقم 7

لكل عددين طبيعيين p , q نضع $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt$

1) قارن $I(p,q)$ و $I(q,p)$

2) بين العلاقة $I(p,q) = \dfrac{p}{q+1} I(p-1,q+1)$

3) أحسب $I(0,n)$ و استنتج $I(p,q)$

التمرين رقم 8

لتكن f ; g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$ و بحيث $g(x) > 0$ $(\forall x \in [a,b])$

بين أن $\displaystyle\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \times \int_a^b g(x) dx$ $(\exists c \in [a,b])$

التمرين رقم 9

1) حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = e^x$ على المجال $[-1,1]$

2) حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sin x$ على المجال $[0,\pi]$

التمرين رقم 10

نعتبر التكاملين $I = \displaystyle\int_{-1}^1 t \arctan t \; dt$ و $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \dfrac{t \; \arctan t}{1+e^t} dt$

1) أحسب I

2) بين أن $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \dfrac{e^t t \; \arctan t}{1+e^t} dt$

3) استنتج أن $I = 2J$ ثم حدد قيمة J

التمرين رقم 11

1) بين أن $1 - t \le \dfrac{1}{1+t} \le t$ $\left(\forall t \in \mathbb{R}^+\right)$

2) استنتج أن $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln\left(1+x\right) \le x$ $\left(\forall x > 0\right)$

التمرين رقم 12

نضع $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $\displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t} \le \dfrac{1}{k}$ $\left(\forall k \in \mathbb{N}^*\right)$

2) بين أن $U_n \ge \displaystyle\int_1^{n+1} \dfrac{dt}{t}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ ثم استنتج $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$

التمرين رقم 13

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

1) بين أن $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

2) استنتج أن $\int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \le S_n \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

3) بين أن $\left(\frac{S_n}{n^{\frac{2}{3}}}\right)_{n\ge1}$ متقاربة وحدد نهايتها a

4) نضع $U_n = S_n - an$ بين أن $(U_n)_{n\ge1}$ متتالية محدودة و أنها متقاربة

التمرين رقم 14

نعتبر الدالة $h(x) = \frac{1}{3}\left(2e^{2x} + e^{-x}\right)$ و نضع $a_n = \int_0^1 \frac{h(t)}{1+nt}dt$ و $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{4e^{\frac{3k}{n}} - 1}{2e^{\frac{3k}{n}} + 1}$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ 0 \le a_n \le h(1)\int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

2) بين أن $(\forall \in \mathbb{N}^*) : \ w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{h'\left(\frac{k}{n}\right)}{h\left(\frac{k}{n}\right)}$ و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ln\left(\frac{2e^3+1}{3e}\right)$

التمرين رقم 15

2) لتكن u دالة متصلة و فردية على المجال $\left[-a,a\right]$ بحيث $a \in \mathbb{R}^{+*}$

أ- أثبت أن : $\int_{-a}^0 u(t)\,dt = -\int_0^a u(t)\,dt$ واستنتج أن $\int_{-a}^a u(t)\,dt = 0$

ب- لتكن g دالة متصلة على $[0,1]$ بين أن

و أن $\int_0^\pi xg(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi g(\sin x)\,dx$

ج- احسب $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

2) نضع $u_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{k}{n^2}}$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln(u_n)\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين رقم 16

1) بين أن : $\frac{1}{3+t^2} + \frac{t}{3+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

2) بين أن : $\displaystyle \int_0^{\alpha} \frac{1}{3+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\tan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right) \quad : \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$

3) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي : $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{1+\sin U}{2+\cos u}\,du$

أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$

ب- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t = \tan\frac{u}{2}$ بين أن : $\displaystyle \forall x \in [0,\pi[\quad : F(x) = 2\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt$

ج- باستعمال السؤالين 1) و2) بين أن : $\displaystyle \forall x \in [0,\pi[\; : F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$

د- باستعمال اتصال الدالة بين أن $\displaystyle \int_0^{\pi} \frac{1+\sin U}{2+\cos u}\,du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

التمرين رقم 17

1) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\displaystyle (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : \; I_n = \frac{1}{(n-1)2^n} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$

ب- أحسب I_1 واستنتج I_3

2) أ- حدد الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث :

$$(\forall t \in [0,1]) \; : \; \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3(1+3t^2)} = \frac{a}{1+3t^2} + \frac{b}{1+t^2} + \frac{ct}{(1+t^2)^3}$$

ب- أحسب التكامل $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3(1+3t^2)}\,dt$

ج- بوضع $t = \tan\frac{x}{2}$ أحسب التكامل $\displaystyle K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2-\cos x}\,dx$

التمرين رقم 18

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $\displaystyle I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,dx$

1) بين أن $(I_n)_n$ تناقصية

2) أ- احسب التكامل I_1

ب- بين أن $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم استنتج $I_2 \; ; \; I_3$

3) أ- بين أن $I_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $\displaystyle I_n \leq \frac{e}{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ثم حدد نهاية I_n

ج- أحسب $(I_n + I_{n+1}) + nI_n$ ثم حدد نهاية nI_n

التمرين رقم 19

نضع $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-x)^2}dx$ و $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^n}{(1-x)^{n+2}}dx$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) أحسب I_0

2) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t=1-x$ أحسب I_1

3) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $I_n=\frac{-1}{2^n(n+1)}+\frac{n}{n+1}I_{n-1}$

ب- بين أن $I_n=\frac{1}{2^n(n+1)}$

التمرين 20

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(1-x)e^{2x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أدرس رتابة الدالة f و أنجز جدول التغيرات

3) بين المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها

4) أرسم المنحنى (C_f)

5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$; $x=1$

(II) لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^{2x}\,dx$

1) أ- بين أن $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e^2}{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$

ب- بين أن $2I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n$

2) نضع $U_n=\frac{2^n}{n!}I_n$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

أ- بين بالترجع أن $\frac{2^{n-1}}{n!}\le 1$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $U_n\le\frac{2e^2}{n+1}$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3) أ- بين أن $U_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+U_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- بين أن لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $U_n=\frac{1}{2}\left(e^2-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

ج- استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$