التمرين الأول:

أحسب مايلي :

$\int_{-1}^{2} x\left\lvert x-1\right\rvert \, dx$	$\int_{-1}^{0} \frac{tdt}{\left(2t^2+1\right)^3}$	$\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}} \, dx$	$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \, dx$
$\int_{0}^{1} \frac{t^3-3t}{\left(t+1\right)^2} \, dt$	$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-2x+1}$	$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$	$\int_{1}^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{x^4+1} \, dx$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$	$\int_{2}^{4} \frac{dt}{1-t^2}$	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \, dx$	$\int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{9+4x^2}$

التمرين الثاني:

باستعمال مكاملة بالأجزاء حدد التكاملات التالية

$\int_{0}^{\pi} x^2 \cos x \, dx$	$\int_{0}^{1} \ln\left(1+x^2\right) \, dx$	$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
$\int_{0}^{\pi} e^x \cos x \, dx$	$\int_{1}^{3} \left(2x-1\right)\ln x \, dx$	$\int_{1}^{2} \left(2x-1\right)e^x \, dx$

التمرين الثالث:

أحسب مايلي :

$\int_{0}^{1} \frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^3}$ ضع $t = x^2$	$\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{2t-1}}{t} dt$ ضع $x = \sqrt{2t-1}$
$\int_{2}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ ضع $t = \sqrt{x-1}$	$\int_{1}^{4} \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$ ضع $t = \sqrt{x}+1$
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ ضع $t = \tan\frac{x}{2}$	$\int_{1}^{4} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ ضع $x = \sqrt{t}$

التمرين الرابع:

1) أ- حدد العددين a , b بحيث : $\frac{2x-5}{\left(x-1\right)^3} = \frac{a}{\left(x-1\right)^2} + \frac{b}{\left(x-1\right)^3}$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}\right)$

ب- استنتج التكامل $\int_{2}^{3} \frac{2x-5}{\left(x-1\right)^3} dx$

2) أ- حدد العددين a , b بحيث : $\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)$

ب- استنتج التكامل $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} dx$

ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

التمرين الخامس :

لكل عدد طبيعي n نعتبر الدالة φ_n المعرفة بما يلي : $\varphi_n(x)=(1-x)^n e^{-2x}$ و نضع $I_n=\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$

1) أحسب I_0 و I_1

2) أ- بين أن $(I_n)_n$ متتالية تناقصية

ب- بين أن $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} I_n$

3) أ- بين أن $2I_{n+1}=1-(n+1)I_n$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

ب- استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} nI_n=1$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} n\left(nI_n-1\right)$

التمرين السادس

لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ و $I_0=\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

1) أحسب التكاملين I_1 ; I_0

2) أ- بين أن المتتالية $(I_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

ب- بين أن $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$

3) أ- بين أن $0 \le \sqrt{2}-\sqrt{x+1} \le \frac{1}{2}(1-x)$ $\left(\forall x \in [0,1]\right)$

ب- استنتج أن $\frac{\sqrt{2}}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و حدد $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

التمرين السابع :

لكل عدد طبيعي n و بحيث $n \ge 2$ نضع $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1) أ- بين أن $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x\,dx \le \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ $\left(\forall k \in \{1,\dots,n\}\right)$

ب- استنتج أن $U_n \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\;dx \le U_n+\frac{\ln n}{n}$ $\left(\forall n \ge 1\right)$

2) أ- بين أن $-1+\frac{1}{n} \le U_n \le -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}$ $\left(\forall n \ge 2\right)$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} U_n$

ب- استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}$