التمرين الأول

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ $\qquad s_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(-1)^k}{k}$ و $I_0=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

1) أحسب التكامل I_0

2) بين أن $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{1+n}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و أن $I_n=(-1)^n\left(I_0+s_n\right)$

3) بين أن $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} s_n$

التمرين الثاني

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\frac{1}{2^{n+1}\,n!}\int_0^1(1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt$

1) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب I_1

2) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ I_{n+1}-I_n=-\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$

3) استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \sqrt{e}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{1!}+....+\frac{1}{2^n n!}+I_n$

4) بين أن $(\exists K\in\mathbb{R})\ 0\le I_n\le\frac{K}{2^n n!}$ و استنتج نهاية المتتالية $U_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{2^k\ k!}$

التمرين الثالث

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=n}\ln(n+k)\right)-\ln(n)$

1) بين أن $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

2) أ- أن من أجل $0\le k\le n-1$ بين أن $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\le\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\ln x\ dx\le\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

أ- استنتج أن : $u_n-\frac{1}{n}\ln 2\le\int_1^2\ln x\,dx\le u_n$

ب- استنتج تأطير ل u_n ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع

1) أحسب التكامل $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$ (ضع $t=\frac{1}{x}$)

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب $J=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

3) حدد نهاية المتتالية $U_n=\left(\frac{(2n)!}{n!\ n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ (يمكن دراسة المتتالية $V_n=\ln U_n$)

التمرين الخامس

حدد نهاية المتتاليات التالية : 1) $U_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{n+k}$ $\qquad$ 2) $U_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k\ 1}^{k=n}\sqrt{k}$ $\qquad$ 3) $U_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n}ke^{\frac{k}{n}}$