التمرين الأول

نعتبر التكامل $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$ 1) بين وجود التكامل I_n

2) بين أن $I_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ و أحسب $I_{n+1} + I_n$ ثم حدد I_0 ; I_1 , I_2

3) أدرس رتابة $(I_n)_n$ و بين أن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$ وحدد $\lim_{n\to+\infty} I_n$

التمرين الثاني

لكل n من $\mathbb{N}$ و $n \geq 2$ نضع $I_n = n\int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x^n}\, dx$

1) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن $I_n = \frac{n}{n-1}\left[\sin(1) + \int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n-1}}\, dx\right]$

2) أ- بين أن : $\left|\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^{n-1}}\, dx\right| \leq \int_1^{\pi} \frac{dx}{x^{n-1}}$

ب- بين أن $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{\pi} \frac{dx}{x^{n-1}} = 0$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} I_n$

التمرين الثالث

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^n e^{-t}\, dt$

1) أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ; \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] : \frac{1}{\sqrt{e}}(1-2t)^n \leq (1-2t)^n e^{-t} \leq (1-2t)^n$

ب- استنتج أن $\frac{1}{2\sqrt{e}(1+n)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} I_n$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء : أ- أحسب I_1

ب- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = 1 - 2(n+1)I_n$

3) استنتج حساب I_2 ; I_3

التمرين الرابع

1) نعتبر التكاملين $I(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}\, dt$ و $J(x) = \int_0^x \frac{-t^3}{1+t}\, dt$ حيث x عدد حقيقي من $\mathbb{R}^+$

أ- أحسب $I(x)$; $J(x)$

ب- استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

2) لتكن الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = \frac{x \ln x}{x-1} ; & x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$

بين أن قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1