I. قانون تركيب داخلي *Loi de composition externe*

1. تعريف :

لتكن E و K مجموعتين غير فارغتين .

كل تطبيق من $K\times E$ نحو E ($\begin{array}{l} f: K\times E\to E \\ (\alpha,x)\mapsto f((\alpha,x)) \end{array}$) يسمى قانون تركيب خارجي معرف في E معاملاته في K نرمز ل $f((\alpha,x))$ ب $\alpha.x$ أو باختصار αx (مع العلم αx من E حيث α من K و x من E) .

2. ملحوظة :

- كل قانون تركيب داخلي هو قانون تركيب خارجي .
- العكسي غير صحيح دائما (مثال $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\times\mathcal{V}_2\to\mathcal{V}_2 \\ (\alpha,\vec{v})\mapsto f((\alpha,\vec{v}))=\alpha.\vec{v} \end{array}$ مع $\mathcal{V}_2$ مجموعة متجهات المستوى) .

3. كتابة $\alpha.x$ لبعض الحالات :

- $E=\mathbb{R}$ و $K=\mathbb{R}$ أي (α,x) من $K\times E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ نكتب : $\alpha.x=\alpha\times x$.
- $E=\mathbb{C}$ و $K=\mathbb{R}$ أي $(\alpha,x)=(\alpha,z)$ من $K\times E=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ مع $x=z=a+ib$ (حيث a و b من $\mathbb{R}$) نكتب :
$\alpha.x=\alpha\times z=\alpha.(a+ib)=\alpha a+i\alpha b$.
- $E=\mathbb{R}^2$ و $K=\mathbb{R}$ أي $(\alpha,x)=(\alpha,(a,b))$ من $K\times E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ (و ليس $K\times E=\mathbb{R}^3$) نكتب :
$\alpha.x=\alpha.(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$

بصفة عامة : $(n\in\mathbb{N}^*)$

$E=\mathbb{R}^n$ و $K=\mathbb{R}$ أي $(\alpha,x)=(\alpha,(a_1,a_2,a_3,....,a_n))$ من $K\times E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ (و ليس $K\times E=\mathbb{R}^{n+1}$) نكتب :
$\alpha.x=\alpha.(a_1,a_2,a_3,....,a_n)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3,....,\alpha a_n)$.

- $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $K=\mathbb{R}$ أي $(\alpha,x)=\left(\alpha,\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right)$ من $K\times E=\mathbb{R}\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ نكتب :
$\alpha.x=\alpha\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\alpha.\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix}$.
- $E=\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ و $K=\mathbb{R}$ أي $(\alpha,x)=\left(\alpha,\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}\right)$ من $K\times E=\mathbb{R}\times\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ نكتب :
$\alpha.x=\alpha\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a' & \alpha a'' \\ \alpha b & \alpha b' & \alpha b'' \\ \alpha c & \alpha c' & \alpha c'' \end{pmatrix}$.
- $E=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ و $K=\mathbb{Z}$ أي $(\alpha,x)=(\alpha,\bar{a})$ من $K\times E=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ نكتب : $\alpha.x=\alpha\times\bar{a}=\overline{\alpha a}$.

II. فضاء متجهي حقيقي : *Espace vectoriel réel*

1. تعريف :

لتكن E مجموعة ($E\neq\varnothing$) مزود بقانونين أحدهما داخلي * و الآخر خارجي • على جسم تبادلي $(K,+,\times)$ معرف كما يلي :

$$.:K\times E\to E$$
$$(\alpha,x)\mapsto \alpha.x=\alpha x$$

نقول إن : المجموعة $(E,*,.)$ فضاء متجهي على الجسم التبادلي K وحدته هي u نضع $u=1$ إذا تحقق ما يلي :

- $(E,*)$ زمرة تبادلية .
- القانون التركيب الخارجي يحقق ما يلي : لكل x و y من E ؛ لكل α و β من K لدينا :
  1. $\alpha.(x*y)=\alpha.x*\alpha.y$.
  2. $(\alpha+\beta).x=\alpha.x*\beta.y$.
  3. $\alpha.(\beta.x)=(\alpha\times\beta).x$.
  4. $u.x=1.x=x$.

2. مفردات :

- الشروط الأربع السابقة تسمى موضوعات الفضاء .
- x و y و z .... عناصر E نسميها متجهات الفضاء $(E,*,.)$ على الجسم التبادلي K و نرمز لها ب : $\vec{x}$ و $\vec{y}$ و $\vec{z}$ ..... .
- عناصر الجسم K تسمى معاملات *Les scalaires* .
- بدل من أن نقول $(E,*,.)$ فضاء متجهي على الجسم التبادلي K نقول المجموعة E هي K فضاء متجهي
  E est $K-$espace vectoriel أو باختصار E هي E est $K-$espace .
- من خلال هذه الموضوعات الأربع السابقة أسست وتطورت نظرية تسمى الجبر الخطي *L'algèbre linéaire* .

3. ملحوظة :

- نعتبر جسم تبادلي $(K,+,\times)$ لدينا $(K,+,\bullet)$ فضاء متجهي على K (مع $\times = \bullet$) . نقول باختصار $(K,+,\bullet)$ فضاء متجهي على الجسم K .
- أمثلة :
  - ✓ $(\mathbb{R},+,\times)=(\mathbb{R},+,\bullet)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.
  - ✓ $(\mathbb{C},+,\times)=(\mathbb{C},+,\bullet)$ فضاء متجهي على $\mathbb{C}$.

4. فضاء متجهي حقيقي :

- تعريف :

كل فضاء متجهي $(E,+,.)=(E,*,.)$ على الجسم التبادلي $(\mathbb{R},+,\times)$ يسمى فضاء متجهي حقيقي .

- ملحوظة :

حالة $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي لدينا :

- $(E,+)$ زمرة تبادلية .

- ✓ التبادلية $\forall \vec{x},\vec{y} \in E : \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$.
- ✓ التجمعية: $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in E : \left(\vec{x}+\vec{y}\right)+\vec{z}=\vec{x}+\left(\vec{y}+\vec{z}\right)$.
- ✓ العنصر المحايد للقانون الداخلي $+$ في E هو $e=\vec{0}$ ومنه : $\forall \vec{x} \in E : \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$.
- ✓ كل عنصر من E له مماثل بالنسبة للقانون الداخلي $+$ هو $-\vec{x}$ ومنه : $\vec{x}+\left(-\vec{x}\right)=\left(-\vec{x}\right)+\vec{x}=\vec{0}$

- القانون التركيب الخارجي . هو $\begin{array}{l} .: \mathbb{R}\times E \to E \\ (\alpha,x)\mapsto \alpha.x=\alpha x \end{array}$.
- الموضوعات الأربعة تكتب على الشكل التالي:

لكل $\vec{x}$ و $\vec{y}$ من E ؛ لكل α و β من $\mathbb{R}$ لدينا :

1. $\alpha\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$.
2. $\left(\alpha+\beta\right)x=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$.
3. $\alpha.\left(\beta.\vec{x}\right)=\left(\alpha\times\beta\right).\vec{x}$.
4. $1.\vec{x}=\vec{x}$.

5. أمثلة :

- $\left(\{\vec{0}\},+,.\right)$ فضاء متجهي على جميع الأجسام التبادلية K .
- $\left(\mathbb{R},+,\cdot\right)=\left(\mathbb{R},+,\times\right)$ فضاء متجهي حقيقي .
- $\left(\mathbb{C},+,\cdot\right)$ فضاء متجهي على الجسم التبادلي $\mathbb{R}$ إذن هو $\left(\mathbb{C},+,\cdot\right)$ فضاء متجهي حقيقي .
- $\left(\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right),+,\cdot\right)$ فضاء متجهي حقيقي .
- $\left(\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right),+,\cdot\right)$ فضاء متجهي حقيقي .
- $\left(\mathcal{F}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right),+,\cdot\right)$ مجموعة الدوال من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ (حيث + هو الجمع المعتاد لدالتين و القانون الخارجي . هو $\alpha\cdot f=\alpha f$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$) هو فضاء متجهي حقيقي .
- ليكن $\left(K,+,\times\right)$ جسم تبادلي و وحدته $u=1$ (أي العنصر المحايد للقانون $\times$. لنعتبر في المجموعة $K\times K$ القانونين التاليين :

$\forall(a,b)\ ,\ (a',b')\in K^2 : (a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$ (قانون داخلي في $K\times K$) .

$\forall(a,b)\in K^2\ ,\ \forall\alpha\in K : \alpha.(a,b)=(\alpha\times a,\alpha\times b)=(\alpha a,\alpha b)$ (قانون خارجي معرف على $K\times K$ معاملاته في K)

1. القانون الداخلي له بنية زمرة تبادلية (يمكنك أن تثبت بسهولة : التبادلية - التجمعية – العنصر المحايد هو الزوج $(0,0)$ و كل زوج (a,b) مماثله $(-a,-b)$) .
2. القانون الخارجي . يحقق موضوعات الفضاء الأربعة :

ليكن (a,b) و (a',b') من $K\times K$ و ليكن α و β من K .

أ- الموضوعة 1 :

$$\begin{aligned} \alpha\left[(a,b)+(a',b')\right] &= \alpha(a+a',b+b') \\ &= (\alpha a+\alpha a',\alpha b+\alpha b') \\ &= (\alpha a,\alpha b)+(\alpha a',\alpha b') \\ &= \alpha(a,b)+\alpha(a',b') \end{aligned}$$

ب- الموضوعة 2 :

$$(\alpha+\beta)\bullet(a,b)=((\alpha+\beta)a,(\alpha+\beta)b)$$
$$=(\alpha a+\beta a,\alpha b+\beta b)$$
$$=(\alpha a,\alpha b)+(\beta a,\beta b)=\alpha(a,b)+\beta(a,b)$$

ج- الموضوعة 3 :

$$\alpha[\beta(a,b)]=\alpha(\beta a,\beta b)$$
$$=(\alpha\beta a,\alpha\beta b)$$
$$=\alpha\beta(a,b)$$

د- الموضوعة 4 :

$$1\bullet(a,b)=(1a,1b)$$
$$=(a,b)$$

خلاصة : $(K\times K,+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(K,+,\times)$.

بصفة عامة : المجموعة $(K^n,+,\bullet)$ (K^n مجموعة العناصر التي على شكل $(a_1,a_2,a_2,....,a_n)$ وهي تسمى *n - uplets*) حيث K^n مزود بالقانونين :

- $(a_1,a_2,a_3,....,a_n)+(b_1,b_2,b_3,....,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,....,a_n+b_n)$ (القانون الداخلي في K^n) .
- $\alpha.(a_1,a_2,a_3,....,a_n)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3,....,\alpha a_n)$ (القانون الخارجي معرف على K^n معاملاته في K)

نتحقق كما سبق بأن $(K^n,+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(K,+,\times)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.

6. نتيجة :

- $(K^n,+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(K,+,\times)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.
- كل جسم تبادلي فهو فضاء متجهي على نفسه .

7. أمثلة :

- $(\mathbb{R}^n,+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(\mathbb{R},+,\times)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.
- أي $(\mathbb{R},+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(\mathbb{R},+,\times)$ و $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(\mathbb{R},+,\times)$ و .... و ....
- $(\mathbb{C}^n,+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(\mathbb{C},+,\times)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$. (وكذلك $(\mathbb{C}^n,+,\bullet)$ فضاء متجهي على $(\mathbb{R},+,\times)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$)

III. خاصيات في فضاء متجهي حقيقي : *Propriétés dans $\mathbb{R}$ - espace vectoriel* (أو قواعد الحساب في فضاء متجهي حقيقي) .

ملحوظة : في الخاصيات التالية نعتبر $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي .

1. خاصية 1 :

$$\forall\vec{x}\in E\ :\ 0\vec{x}=\vec{0}$$

2. برهان :

ليكن $\vec{x}$ من E و α من $\mathbb{R}$ لدينا : $\alpha\vec{x}+\vec{0}=\alpha\vec{x}$ (لأن $(E,+)$ زمرة تبادلية و $\vec{0}$ العنصر المحايد فيها)

$$=(\alpha+0)\vec{x}$$ (لأن $\mathbb{R}$ جسم تبادلي)

$= \alpha\vec{x} + 0\vec{x}$ (حسب إحدى موضوعات الفضاء)

ومنه : $\alpha\vec{x} + \vec{0} = \alpha\vec{x} + 0\vec{x}$

إذن : $\vec{0} = 0\vec{x}$ (بما أن $(E,+)$ زمرة تبادلية إذن كل عنصر من E منتظم ل $+$ لأن $\alpha\vec{x} \in E$)

خلاصة : $\vec{0} = 0\vec{x}$

3. خاصية 2 :

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \alpha\vec{0} = \vec{0}$

4. برهان :

ليكن $\vec{x}$ من E و α من $\mathbb{R}$ لدينا :

$\alpha\vec{x} + \vec{0} = \alpha\vec{x}$ (لأن $(E,+)$ زمرة تبادلية و $\vec{0}$ العنصر المحايد فيها)

$= \alpha\left(\vec{x} + \vec{0}\right)$ (لأن $(E,+)$ زمرة تبادلية و $\vec{0}$ العنصر المحايد فيها)

$= \alpha\vec{x} + \alpha\vec{0}$ (حسب إحدى موضوعات الفضاء)

ومنه : $\alpha\vec{x} + \vec{0} = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{0}$

إذن : $\vec{0} = \alpha\vec{0}$ (بما أن $(E,+)$ زمرة تبادلية إذن كل عنصر من E منتظم ل $+$ لأن $\alpha\vec{x} \in E$)

خلاصة : $\vec{0} = \alpha\vec{0}$

5. خاصية 3 :

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ ; \forall \vec{x} \in E \ : \alpha\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$ ($\vec{x} = \vec{0}$ أو $\alpha = 0$)

6. برهان :

$\Leftarrow$ الاستلزام العكسي صحيح حسب الخاصيتين السابقتين .

$\Rightarrow$ نبين أن الاستلزام المباشر صحيح .

ليكن $\vec{x}$ من E و α من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha\vec{x} = \vec{0}$.

إذا كان $\alpha = 0$ الاستلزام المباشر صحيح .

نفترض أن $\alpha \neq 0$.

بما أن $\alpha \neq 0$ إذن $\alpha \in \mathbb{R}^*$ إذن قابل للمماثلة ومماثله هو $x^{-1} \in \mathbb{R}^*$.

لدينا : $\alpha\vec{x} = \vec{0}$. ومنه :

$$\alpha\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \alpha^{-1}\left(\alpha\vec{x}\right) = \alpha^{-1}\vec{0}$$
$$\Rightarrow \left(\alpha^{-1}\alpha\right)\vec{x} = 1.\vec{0}$$
$$\Rightarrow 1.\vec{x} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

ومنه $\vec{x} = \vec{0}$

و بالتالي : الاستلزام المباشر صحيح .

خلاصة : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ ; \forall \vec{x} \in E \ : \alpha\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$ ($\vec{x} = \vec{0}$ أو $\alpha = 0$)

7. خاصية 4 :

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ ;\ \forall\vec{x}\in E\ :\ (-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x})$$

8. برهان :

ليكن $\vec{x}$ من E و α من $\mathbb{R}$.

- نبين أن : $(-\alpha)\vec{x}=-(\alpha\vec{x})$

لدينا : $\alpha+(-\alpha)=0\Rightarrow(\alpha+(-\alpha))\vec{x}=0\vec{x}$. (استعمال القانون الخارجي . مع $\vec{x}$)

إذن : $\Rightarrow\alpha\vec{x}+(-\alpha)\vec{x}=\vec{0}$. (حسب الخاصية 1 و إحدى موضوعات الفضاء)

ومنه : $\Rightarrow\underbrace{-(\alpha\vec{x})+\alpha\vec{x}}_{\vec{0}}+(-\alpha)\vec{x}=\underbrace{-(\alpha\vec{x})+\vec{0}}_{-(\alpha\vec{x})}$. (نركب في المجموعة $(E,+)$ ب $-(\alpha\vec{x})$)

ومنه : $\Rightarrow(-\alpha)\vec{x}=-(\alpha\vec{x})$. (مماثل $\alpha\vec{x}$ هو $-(\alpha\vec{x})$ في $(E,+)$)

إذن : $\boxed{(-\alpha)\vec{x}=-(\alpha\vec{x})}$ ①

- نبين أن : $-\alpha\vec{x}=-(\alpha\vec{x})$

حسب البرهان السابق : $(-\alpha)\vec{x}=-(\alpha\vec{x})$ و حسب إحدى موضوعات الفضاء نحصل على: $(-1)\vec{x}=-(1\vec{x})=-\vec{x}$

ومنه : $(-1)\vec{x}=-\vec{x}$ (العلاقة ②)

و بالتالي :

$$② \Rightarrow\alpha\left[(-1)\vec{x}\right]=\alpha\left[-\vec{x}\right]$$
$$\Rightarrow(\alpha(-1))\vec{x}=\alpha(-\vec{x})$$
$$\Rightarrow(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})$$

إذن : $\boxed{(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})}$ ③

حسب : ① و ③ نحصل على : $\boxed{(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x})}$ وهذا ماكنا نبحث عنه .

IV. الفضاءات المتجهية الجزئية : *Les sous - espaces vectoriels*

1. تعريف :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من E ($E\subset F$) .

نقول إن $(F,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$ إذا تحقق ما يلي:

- $(F,+)$ زمرة جزئية ل $(E,+)$.
- القصور القانون التركيب الخارجي $\bullet$ على المجموعة $\mathbb{R}\times F$ (أي $\bullet:\mathbb{R}\times F\to F$; $(\alpha,x)\mapsto\alpha.x=\alpha x$) بدوره يحقق الموضوعات الفضاء الأربع .

2. الخاصية المميزة 1:

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير منعدم من E ($E \subset F$ و $F \neq \varnothing$) .

$(F,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$ إذا و فقط إذا كان :

- $\forall (x,y) \in F^2 \; : \; x+y \in F$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \in F \; : \; \alpha x \in F$.

3. برهان :

$\Rightarrow$ نبين على صحة الاستلزام المباشر :

لدينا : $(F,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$ نبين على صحة الشرطين .

- بما أن : $(F,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$ إذن $(F,+)$ زمرة جزئية ل $(E,+)$ إذن $(F,+)$ مستقرة إذن :

$\forall (x,y) \in F^2 \; : \; x+y \in F$ ومنه الشرط الأول تحقق .

- الشرط الثاني متحقق لأنه قصور القانون الخارجي • ومنه $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \in F \; : \; \alpha x \in F$.

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

$\Rightarrow$ نبين على صحة الاستلزام العكسي :

لدينا الشرطين و نبين على صحة : $(F,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$.

- ومنه حسب الشرط الأول : $(F,+)$ مستقرة .
- حسب الشرط الثاني : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \in F \; : \; \alpha x \in F$ نأخذ $\alpha = -1$ نحصل $\alpha x = -1x = -x \in F$ فإن $-x \in F$

إذن : $(F,+)$ زمرة جزئية ل $(E,+)$.

- ليكن (x,y) من F^2 و (α,β) من $\mathbb{R}^2$.

لدينا : (x,y) من E^2 (لأن $E \subset F$) ونعلم أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي إذن يحقق الموضوعات الفضاء الأربع ومنه نحصل على صحة الموضوعات الفضاء الأربع تتحقق لكل (x,y) من F^2.

وبالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصية المميزة 1:

4. الخاصية المميزة 2 :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير منعدم من E ($E \subset F$ و $F \neq \varnothing$) .

$(F,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$ إذا و فقط إذا كان :

- $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \; , \; \forall (x,y) \in F^2 \; : \; \alpha x + \beta y \in F$.

5. برهان :

يكفي أن نبين تكافؤ الخاصيتين المميزتين 1 و 2 .

$\Rightarrow$ نبين على صحة الاستلزام المباشر :

لدينا $\forall (x,y) \in F^2 \; : \; x+y \in F$ (الشرط 1) و $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \in F \; : \; \alpha x \in F$ (الشرط 2)

ونبين أن : $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \; , \; \forall (x,y) \in F^2 \; : \; \alpha x + \beta y \in F$.

ليكن x و y من F و α و β من ℝ إذن αx و βy من F حسب الشرط 2 .

ومنه $\alpha x+\beta y$ من F حسب الشرط 1

و بالتالي : $\alpha x+\beta y\in F$

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

$\Rightarrow$ نبين على صحة الاستلزام العكسي :

لدينا : $\alpha x+\beta y\in F\ :\ \forall(x,y)\in F^2\ ,\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ و نبين على صحة الشرطين .

ليكن x و y من F و α و β من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha x+\beta y\in F$

نأخذ : $\alpha=\beta=1$ نحصل على $\forall(x,y)\in F^2\ :\ x+y\in F$

إذن الشرط 1 تحقق.

ليكن x و y من F و α و β من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha x+\beta y\in F$

نأخذ : $\alpha=1$ و $\beta=0$ نحصل على $\forall(x,y)\in F^2\ :\ \alpha x\in F$

إذن الشرط 2 تحقق.

وبالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصيتان المميزة 1 و 2 متكافئتين:

6. مثال :

ليكن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي حيث $E\neq\{\vec{0}\}$ و $\vec{a}$ عنصر من E مع $\vec{a}\neq\vec{0}$ لنعتبر الجزء $D_{\vec{a}}$ من E المعرف ب :

$D_{\vec{a}}=\{\vec{x}\in E\ /\ \exists k\in\mathbb{R};\vec{x}=k\vec{a}\}$.

نبين أن : $(D_{\vec{a}},+,\bullet)$ فضاء حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$.

لهذا نستعمل الخاصية المميزة 2 :

ليكن $\vec{x}$ و $\vec{y}$ من $D_{\vec{a}}$ إذن يوجد k و k' من $\mathbb{R}$ حيث $\vec{x}=k\vec{a}$ و $\vec{y}=k'\vec{a}$

ليكن α و β من $\mathbb{R}$ نتحقق هل $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in D_{\vec{a}}$ ؟

لدينا : $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\alpha(k\vec{a})+\beta(k'\vec{a})$

$=(\alpha k)\vec{a}+(\beta k')\vec{a}$ (حسب إحدى موضوعات الفضاء)

$=(\alpha k+\beta k')\vec{a}$ (حسب إحدى موضوعات الفضاء)

$=k''\vec{a}\in D_{\vec{a}}$ ($k''=\alpha k+\beta k'\in\mathbb{R}$)

ومنه : $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in D_{\vec{a}}$

خلاصة : $(D_{\vec{a}},+,\bullet)$ فضاء حقيقي جزئي ل $(E,+,\bullet)$. المجموعة $D_{\vec{a}}$ تسمى المستقيم المتجهي المولد ب $\vec{a}$.

V. الأسرة – التأليفات الخطية *Les familles - Les combinaisons linéaires*

1. أسرة منتهية من المتجهات :

❖ تعريف :

ليكن $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ .... و $\vec{e_n}$ عدد منتهي من متجهات فضاء متجهي حقيقي $(E,+,\bullet)$. $(n\in\mathbb{N}^*)$.

$(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},.....,\vec{e_n})$ $(n\text{-}uplets)$ يسمى أسرة منتهية من المتجهات E و نرمز لها ب: . $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},.....,\vec{e_n})$

❖ أمثلة :

مثال 1 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ نعتبر المتجهات (أي الأزواج) : $\vec{e_1}=(1,2)$ و $\vec{e_2}=(5,9)$ و $\vec{e_3}=(6,7)$ و $\vec{e_4}=(0,1)$

لدينا : $\mathcal{F}_1=(\vec{e_1})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_2=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_3=(\vec{e_2},\vec{e_3})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_4=(\vec{e_1},\vec{e_3})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_5=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

مثال 2 :

في الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ نعتبر المتجهات (أي المصفوفات) : $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}$ و $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}-2&5\\3&7\end{pmatrix}$ و

$\vec{e_3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $\vec{e_4}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

لدينا : $\mathcal{F}_1=(\vec{e_1})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_2=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_3=(\vec{e_2},\vec{e_3})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_4=(\vec{e_1},\vec{e_3})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

$\mathcal{F}_5=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})$ أسرة للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

2. تأليفة خطية منتهية :

❖ **تعريف :**

ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

- نسمي تأليفة خطية للمتجهات $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$....... و $\vec{e_n}$ من E كل متجهة $\vec{u}$ من E تحقق ما يلي :
  توجد أعداد حقيقية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$....... و α_n حيث : $\vec{u}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\vec{e_i}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}+.....+\alpha_n\vec{e_n}$
- الأعداد الحقيقية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$....... و α_n تسمى معاملات التأليفة الخطية .

3. أمثلة :

❖ **مثال 1 :**

المتجهة $\vec{0}$ هي تأليفة خطية لكل أسرة منتهية من متجهات أي فضاء متجهي حقيقي $(E,+,\cdot)$.

❖ **مثال 2 :**

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ نعتبر المتجهتين (أي الزوجين) : $\vec{e_1}=(1,2)$ و $\vec{e_2}=(5,9)$

لدينا المتجهة (أي الزوج) : $\vec{u}=(13,24)$ تحقق ما يلي : $\vec{u}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}\Leftrightarrow(13,24)=3(1,2)+2(5,9)$

إذن : $\vec{u}$ تأليفة خطية ل $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$.

❖ **مثال 3 :**

في الفضاء المتجهي $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ نعتبر المتجهتين (أي المصفوفتين): $\vec{x}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ و $\vec{y}=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$

لدينا المتجهة (أي المصفوفة) : $\vec{u}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ تحقق ما يلي : $\vec{u}=\vec{x}+\vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 6\\ 5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$

إذن : $\vec{u}$ تأليفة خطية ل $\vec{x}$ و $\vec{y}$.

❖ مثال 4 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\bullet)$ نعتبر المتجهتين (أي العددين العقديين) : $\vec{e_1}=1$ و $\vec{e_2}=i$

لدينا المتجهة (أي العدد العقدي): $\vec{u}=5-3i$ تحقق ما يلي : $\vec{u}=5\vec{e_1}-3\vec{e_2} \Leftrightarrow 5-3i=5.1+(-3).i$

إذن : $\vec{u}$ تأليفة خطية ل $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$.

4. أسرة $\mathcal{F}$ تولد فضاء متجهي حقيقي :

❖ تعريف :

لتكن $\mathcal{F}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots\dots,\vec{e_n}\right)$ أسرة من المتجهات E و $\vec{u}$ متجهة من E .

- نقول إن الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots\dots,\vec{e_n}\right)$ تولد المتجهة $\vec{u}$ (*engendre* $\vec{u}$) إذا كانت $\vec{u}$ تكتب على شكل تأليفة خطية للمتجهات $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\dots\dots$ و $\vec{e_n}$.
- نقول إن الأسرة $\mathcal{F}$ تولد الفضاء E إذا كانت الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots\dots,\vec{e_n}\right)$ تولد جميع متجهات الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

أي : $\forall\vec{u}\in E\ ,\ \exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots\dots\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\ /\ \vec{u}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\vec{e_i}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}+\dots\dots+\alpha_n\vec{e_n}$.

❖ أمثلة :

مثال 1 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$ نعتبر الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ حيث : المتجهتين (أي الزوجين) : $\vec{e_1}=(1,0)$ و $\vec{e_2}=(0,1)$

لدينا : لكل متجهة $\vec{x}$ من $\mathbb{R}^2$ (أي الزوج $\vec{x}=(a,b)$) تحقق ما يلي : $\vec{x}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2} \Leftrightarrow (a,b)=a(1,0)+b(0,1)$

إذن: كل متجهة $\vec{x}$ من E هي تأليفة خطية ل $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$.

خلاصة : الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$.

مثال 2 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3,+,\bullet)$ نعتبر الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ حيث : المتجهات (أي المثلوثات) : $\vec{e_1}=(1,0,0)$ و $\vec{e_2}=(0,1,0)$ و $\vec{e_3}=(0,0,1)$.

لدينا : لكل متجهة $\vec{x}$ من $\mathbb{R}^3$ (أي المثلوث $\vec{x}=(a,b,c)$) تحقق ما يلي :

$$\vec{x}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3} \Leftrightarrow (a,b,c)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$$

إذن: كل متجهة $\vec{x}$ من E هي تأليفة خطية ل $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$.

خلاصة : الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^3,+,\bullet)$.

مثال 3 :

في الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ نعتبر المتجهات (أي المصفوفات): $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ و $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ و $\vec{e_4}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

لدينا لكل المتجهة $\vec{u}$ (أي لكل مصفوفة) : $\vec{u}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ تحقق ما يلي :

$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow \vec{u}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}+d\vec{e_4}$$

إذن : كل متجهة (مصفوفة) $\vec{u}$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي تأليفة خطية للمصفوفات $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ و $\vec{e_4}$.

خلاصة : الأسرة $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

مثال 4 :

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$ نعتبر المتجهتين (أي العددين العقديين) : $\vec{e_1}=1$ و $\vec{e_2}=i$

لدينا لكل متجهة $\vec{x}$ من $\mathbb{C}$ (أي لكل عدد عقدي): $\vec{u}=z=a+bi$ تحقق ما يلي : $a+bi=a.1+b.i\Leftrightarrow\vec{u}=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}$

إذن : $\vec{u}$ تأليفة خطية ل $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$.

خلاصة : الأسرة $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2})$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

5. أسرة حرة منتهية - أسرة مقيدة منتهية : *Famille libre finie - Famille liée finie* .

❖ تعاريف : (أسرة حرة منتهية)

نقول إن أسرة $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\ldots\ldots,\vec{e_n})$ من متجهات فضاء متجهي حقيقي $(E,+,\cdot)$ هي حرة (أو أيضا المتجهات $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\ldots\ldots$ و $\vec{e_n}$ مستقلة خطيا) إذا تحقق الاستلزام التالي :

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\ /\ \alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}+\ldots\ldots+\alpha_n\vec{e_n}=\vec{0}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_n=0$$

❖ ملحوظة :

$\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\ldots\ldots,\vec{e_n})$ أسرة حرة إذا كان :

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\ /\ \alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}+\ldots\ldots+\alpha_n\vec{e_n}=\vec{0}\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)=(0,0,0,\ldots,0)$$

أو أيضا : $\alpha_i=0\Leftarrow\vec{u}=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i\vec{e_i}=\vec{0}\ ;\ \forall\alpha_i\in\mathbb{R}$ مع $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$) .

❖ أمثلة :

مثال 1 :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$ نعتبر المتجهات (أي الأزواج) : $\vec{e_1}=(1,0,0,0)$ و $\vec{e_2}=(0,1,0,0)$ و $\vec{e_3}=(0,0,1,0)$

نبين أن المتجهات $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ تكون أسرة حرة .

ليكن $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ من $\mathbb{R}^3$ حيث $\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}=\vec{0}$ (1) ونبين أن : $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

$$(1) \Rightarrow \alpha_1(1,0,0,0)+\alpha_2(0,1,0,0)+\alpha_3(0,0,1,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1,0,0,0)+(0,\alpha_2,0,0)+(0,0,\alpha_3,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha_1=0 \text{ و } \alpha_2=0 \text{ و } \alpha_3=0$$

ومنه : $\alpha_1=0$ و $\alpha_2=0$ و $\alpha_3=0$.

خلاصة : المتجهات $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ تكون أسرة حرة . (أو أيضا الأسرة $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ أسرة حرة أو غير مقيدة) .

❖ تعاريف : (أسرة مقيدة منتهية)

إذا كانت أسرة منتهية $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots,\vec{e_n})$ من فضاء متجهي حقيقي $(E,+,\cdot)$ غير حرة نقول إن الأسرة $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots,\vec{e_n})$ مقيدة منتهية) ونقول أيضا المتجهات $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\dots$ و $\vec{e_n}$ مرتبطة خطيا) .

❖ ملحوظة :

$\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots,\vec{e_n})$ أسرة حرة إذا كان :

$\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\dots,\vec{e_n})$ مقيدة إذا كان توجد أعداد حقيقية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\dots$ و α_n ليست كلها منعدمة حيث

$\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}+\dots+\alpha_n\vec{e_n}=\vec{0}$.

أو أيضا : $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)\neq(0,0,0,\dots,0)$ و $\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}+\dots+\alpha_n\vec{e_n}=\vec{0}$ / $\exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$

❖ مثال :

في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$ نعتبر المتجهات (أي الأزواج) : $\vec{e_1}=(1,0,0,0)$ و $\vec{e_2}=(0,1,0,0)$ و $\vec{e_3}=(2,1,0,0)$

نبين أن المتجهات $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ ليست مستقلة خطيا .

ليكن $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ من $\mathbb{R}^3$ حيث $\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}=\vec{0}$ (1) ونبين على الأقل أحد الأعداد α_1,α_2 و α_3 غير منعدم .

$$(1) \Rightarrow \alpha_1(1,0,0,0)+\alpha_2(0,1,0,0)+\alpha_3(2,1,0,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1,0,0,0)+(0,\alpha_2,0,0)+(2\alpha_3,\alpha_3,0,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1+2\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,0,0)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha_1+2\alpha_3=0 \text{ و } \alpha_2+\alpha_3=0$$
$$\Rightarrow \alpha_1=-2\alpha_3 \text{ و } \alpha_2=-\alpha_3$$

يكفي أن نأخذ : ومنه : $\alpha_3=1$ إذن و $\alpha_2=-1$ و $\alpha_1=-2$.

خلاصة : المتجهات $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ غير مستقلة خطيا أو أيضا تكون أسرة ليست بحرة . (أو أيضا $\mathcal{F}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ أسرة حرة)

6. خاصيات :

ليكن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي . حيث العنصر المحايد للزمرة $(E,+)$ هو المتجهة $\vec{0}$.

- كل أسرة تحتوي على المتجهة $\vec{0}$ فهي مقيدة . (أي أسرة حرة لا تحتوي على المتجهة $\vec{0}$) .
- كل أسرة تتكرر فيها متجهة فهي مقيدة . (أي أسرة حرة عناصرها مختلفة مثنى مثنى) .
- أسرة مقيدة يكافئ إحدى المتجهات من الأسرة تكتب بتأليفة خطية للمتجهات المتبقية (أي بدلالة المتجهات المتبقية) .

VI. الأساسات في الفضاء المتجهي الحقيقي المنتهية – بعد فضاء متجهي منتهي.

Bases d'un espace vectoriel fini - dimension d'un espace vectoriel fini

1. تعريف 1 :

نقول إن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي بعده منتهي إذا وجدة أسرة منتهية تولد الفضاء المتجهي الحقيقي E .

2. تعريف 2 :

$\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},.....,\vec{e_n}\right)$ أسرة منتهية متكونة من عناصر فضاء متجهي حقيقي $(E,+,\bullet)$.

- نقول إن الأسرة $\mathcal{B}$ هي أساس منتهي للفضاء المتجهي الحقيقي E إذا كانت كل متجهة $\vec{x}$ من E تكتب بطريقة وحيدة على شكل تأليفة خطية لعناصر $\mathcal{B}$) أو أيضا : $\vec{x}= x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}+.....+x_n\vec{e_n}$ / $\forall\vec{x}\in E \ ,\exists!(x_1,x_2,.....,x_n)\in\mathbb{R}^n$) .
- في هذه الحالة : نقو ل أن الفضاء E منسوب إلى الأساس $\mathcal{B}$ أو أيضا الفضاء E مزود بأساس $\mathcal{B}$.
- $(x_1,x_2,.....,x_n)$ يسمى إحداثيات المتجهة $\vec{x}$ في الأساس $\mathcal{B}$ و نكتب $\vec{x}(x_1,x_2,.....,x_n)$ أو أيضا $\vec{x}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.
- أما n عدد متجهات المكونة للأساس $\mathcal{B}$ يسمى بعد الفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$ و نرمز لذلك ب: $\dim E=n$. أما الفضاء E نرمز له ب E_n

3. خاصية :

$\vec{x}(x_1,x_2,.....,x_n)$ و $\vec{y}(y_1,y_2,.....,y_n)$ متجهتين من الفضاء المتجهي الحقيقي E منسوب إلى أساس $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_n}\right)$.

- المتجهة $\alpha\vec{x}$ إحداثياتها هي $(\alpha x_1,\alpha x_2,.....,\alpha x_n)\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$ أو أيضا : $\alpha\vec{x}\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix}$
- المتجهة $\vec{x}+\vec{y}$ إحداثياتها هي $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)(x_1+y_1,x_2+y_2,.....,x_n+y_n)$ أو أيضا : $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$.

4. برهان :

$\Rightarrow$ نبين على صحة الاستلزام المباشر :

لدينا :

- $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_n}\right)$ أسرة ل $(E,+,\bullet)$ إذن كل متجهة $\vec{x}$ من E تكتب بطريقة وحيدة على شكل تأليفة خطية لعناصر $\mathcal{B}$ إذن $\mathcal{B}$ أسرة مولدة للفضاء E .
- نبين أن $\mathcal{B}$ أسرة حرة : ليكن $(\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_n)$ من $\mathbb{R}^n$ حيث $\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}+\cdots+\alpha_n\vec{e_n}=\vec{0}$ (1) و نعلم أن :

$0\vec{e_1}+0\vec{e_2}+0\vec{e_3}+\cdots+0\vec{e_n}=\vec{0}$ وبما أن طريقة الكتابة هي وحيدة (لأن $\mathcal{B}$ أساس) إذن $\alpha_1=0$ و $\alpha_2=0$ و ...و $\alpha_n=0$

ومنه : $\mathcal{B}$ أسرة حرة .

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

$\Leftarrow$ نبين على صحة الاستلزام العكسي :

لدينا : $\mathcal{B}$ أسرة حرة و مولدة .

- بما أن $\mathcal{B}$ أسرة مولدة إذن لكل متجهة $\vec{x}$ من E تكتب على شكل تأليفة خطية لعناصر $\mathcal{B}$ إذن يوجد $(\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_n)$ من $\mathbb{R}^n$ حيث $\vec{x}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\cdots+\alpha_n\vec{e_n}$.

نبين أن هذه الكتابة وحيدة .

نفترض أن $\vec{x}$ له كتابة ثانية لتكن هي $\vec{x}=\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\cdots+\beta_n\vec{e_n}$ مع $(\beta_1,\beta_2,.....\beta_n)$. ومنه :

$$\begin{aligned}\vec{0}&=\vec{x}-\vec{x}\\&=\left(\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\cdots+\alpha_n\vec{e_n}\right)-\left(\beta_1\vec{e_1}+\beta_2\vec{e_2}+\cdots+\beta_n\vec{e_n}\right)\\&=(\alpha_1-\beta_1)\vec{e_1}+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e_2}+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)\vec{e_n}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\alpha_1-\beta_1)\vec{e_1}+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e_2}+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)\vec{e_n}=\vec{0}$

إذن : $(\alpha_1-\beta_1)=0$ و $(\alpha_2-\beta_2)=0$ و.... و $(\alpha_n-\beta_n)=0$ (لأن $\mathcal{B}$ أسرة حرة)

ومنه : $\alpha_1=\beta_1$ و $\alpha_2=\beta_2$ و.... و $\alpha_n=\beta_n$

إذن : كل متجهة $\vec{x}$ من E تكتب بطريقة وحيدة على شكل تأليفة خطية لعناصر $\mathcal{B}$.

ومنه : $\mathcal{B}$ أسرة حرة .

وبالتالي الاستلزام العكسي صحيح . $\vec{e_1}=1$ و $\vec{e_2}=i$ $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_n}\right)$

و هذا يثبت صحة الخاصية .

5. خاصية : (تقبل)

> $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $dimE=n$.
> كل أساس $\mathcal{B}$ للفضاء E يحتوي بالضبط على n متجهة .

6. أمثلة :

مثال 1 : $(\mathbb{R},+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $dim\mathbb{R}=1$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1}\right)$ مع $\vec{e_1}=1$.

مثال 2 : $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $dim\mathbb{R}^2=2$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ مع $\vec{e_1}=(1,0)$ و $\vec{e_2}=(0,1)$. (أو $\vec{e_1}=(1,0)$ و $\vec{e_2}=(2,1)$) .

مثال 3 : $(\mathbb{R}^3,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $dim\mathbb{R}^3=3$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ مع $\vec{e_1}=(1,0,0)$ و $\vec{e_2}=(0,1,0)$ و $\vec{e_3}=(0,0,1)$. (أو $\vec{e_1}=(-1,0,0)$ و $\vec{e_2}=(0,-1,0)$ و $\vec{e_3}=(0,0,-1)$)

مثال 4 : $(\mathbb{C},+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $dim\mathbb{C}=2$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=(1,i)$ مع $\vec{e_1}=1$ و $\vec{e_2}=i$

مثال 5 : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي منتهي حيث : $dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=4$ و نأخذ كأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}\right)$ مع

$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ و $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ و $\vec{e_4}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

مثال 6 : $\left(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ فضاء متجهي حقيقي ليس له أساس .

VII. محددة أسرة متكونة من n متجهة من فضاء متجهي E بعده n

Déterminant d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n

1. حالة $n=2$ نأخذ الأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ بدل من $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ و الفضاء $(E,+,\cdot)$ نرمز له ب $(E_2,+,\cdot)$

❖ تعريف :

$\vec{u}(x_1,x_2)$ و $\vec{v}(y_1,y_2)$ متجهتين من فضاء متجهي حقيقي $(E_2,+,\cdot)$ منسوب إلى أساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

العدد الحقيقي : $x_1\times y_2-x_2\times y_1=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$ يسمى محددة الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$

أو أيضا : يسمى محددة المتجهتين $\vec{u}$ ثم $\vec{v}$ (الترتيب مهم) بالنسبة للأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$

نرمز لذلك ب : $x_1\times y_2-x_2\times y_1=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

❖ تقنية :

$$\begin{array}{ccc} & \vec{u} & \vec{v}\\ & \downarrow & \downarrow\end{array}$$

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & & y_1\\ & \times & \\ x_2 & & y_2\end{vmatrix}=x_1\times y_2-x_2\times y_1$$

❖ خاصية :

- $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أسرة حرة يكافئ $\det\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)\neq 0$
- $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أسرة مقيدة يكافئ $\det\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=0$ (هي تمثل نفس الخاصية الأولى)

❖ برهان :

نضع $\vec{e_1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ و $\vec{e_2}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$

⇐ نبين على صحة الاستلزام المباشر :

نفترض أن $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أسرة مقيدة إذن يوجد $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$ من $\mathbb{R}^2$ حيث $\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}=\vec{0}$

نأخذ $\alpha_1\neq 0$ ومنه : $\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}=\vec{0}\Rightarrow \vec{e_1}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{e_2}=\lambda\vec{e_2}$

إذن $\vec{e_1}\begin{pmatrix}\lambda c\\ \lambda d\end{pmatrix}$ و $\vec{e_2}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ مستقيميتين ومنه : $\det\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=\begin{vmatrix}\lambda c & c\\ \lambda d & d\end{vmatrix}=\lambda cd-\lambda dc=0$

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

⇐ نبين على صحة الاستلزام العكسي :

لدينا : $\det\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc=0$ أي $ad=bc$ (1) ونبين أن $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أسرة مقيدة .

نفترض أن $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أسرة حرة ومنه الأسرة لا تحتوي على المتجهة المنعدمة إذن $\vec{e_1}\neq\vec{0}$ و $\vec{e_2}\neq\vec{0}$ ومنه $(a,b)\neq(0,0)$ و $(c,d)\neq(0,0)$

نفترض أن $a\neq 0$ حسب (1) نحصل على $d=\frac{bc}{a}$ ومنه $a\vec{e_2}\begin{pmatrix} bc \\ ac \end{pmatrix}$ ... $a\vec{e_2}\begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix}=a\vec{e_2}\begin{pmatrix} ac \\ a\frac{bc}{a} \end{pmatrix}=a\vec{e_2}\begin{pmatrix} ac \\ ad \end{pmatrix}$ و $c\vec{e_1}\begin{pmatrix} ca \\ ca \end{pmatrix}$

إذن : $a\vec{e_2}=c\vec{e_1}$ ومنه : $a\vec{e_2}-c\vec{e_1}=\vec{0}$ مع $(a,c)\neq(0,0)$ (لأن $a\neq 0$) و بالتالي $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أسرة مقيدة .

إذن : ما افترضناه كان خاطئا .

خلاصة : $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أسرة مقيدة .

وبالتالي الاستلزام العكسي صحيح .

❖ خاصية :

- $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أساس ل E_2 يكافئ $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أسرة حرة

❖ برهان :

❖ $\Rightarrow$ نبين على صحة الاستلزام المباشر :

بما أن $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أساس ل E_2 إذن هي أسرة حرة .

وبالتالي الاستلزام المباشر صحيح .

$\Leftarrow$ نبين على صحة الاستلزام العكسي :

نفترض أن $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أسرة حرة ثم نبين أن $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أسرة مولدة ل E_2 .

ليكن $\vec{u}=\alpha\vec{e_2}+\beta\vec{e_1}\in E_2$: (1) مع (α,β) من $\mathbb{R}^2$ . .

لدينا : $\det\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$ (لأن $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أسرة حرة) .

و بالتالي النظمة : التالية تقبل حل في $\mathbb{R}^2$: $(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax+cy=\alpha \\ bx+dy=\beta \end{cases}$

حسب :

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow \vec{u}=(ax+cy)\vec{i}+(bx+dy)\vec{j}\\ &\Leftrightarrow \vec{u}=x\left(a\vec{i}+b\vec{j}\right)+y\left(c\vec{i}+d\vec{j}\right)\\ &\Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\end{aligned}$$

ومنه : $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ أسرة مولدة ل E_2 .

❖ مثال: نضع : $\vec{e_1}=(1,0)$ و $\vec{e_2}=(2,1)$ هل $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أساس ل $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$.

لدينا : $\det\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1\neq 0$ ومنه : $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ أساس ل $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$.

2. حالة $n=3$ نأخذ الأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ بدل من $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_2}\right)$ و الفضاء $(E,+,\bullet)$ نرمز له ب $(E_3,+,\bullet)$

❖ **تعريف :**

$\vec{u}\left(a_{11},a_{21},a_{31}\right)$ و $\vec{v}\left(a_{12},a_{22},a_{32}\right)$ و $\vec{w}\left(a_{13},a_{23},a_{33}\right)$ متجهات من فضاء متجهي حقيقي $(E_3,+,\bullet)$ منسوب إلى أساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

العدد الحقيقي : $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ ... $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ يسمى محددة الأسرة $\mathcal{F}=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

بالنسبة للأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

أو أيضا : يسمى محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ (الترتيب مهم) بالنسبة للأساس $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نرمز لذلك ب : $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

❖ **تقنية :**

$$\begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

❖ **خاصية :**

- $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ أسرة حرة يكافئ $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\neq 0$
- $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ أسرة مقيدة يكافئ $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$ (هي تمثل نفس الخاصية الأولى)

❖ **خاصية :**

- $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ أساس ل E_2 يكافئ $\mathcal{B}_1=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ أسرة حرة

❖ **مثال:** نضع : $\vec{e_1}=(1,0,3)$ و $\vec{e_2}=(2,1,0)$ و $\vec{e_3}=(5,0,-1)$ هل $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ أساس ل $\left(\mathbb{R}^3,+,\bullet\right)$.

لدينا : $\det\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1-0-15=-16$ ومنه : $\mathcal{B}=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$

أساس ل $\left(\mathbb{R}^2,+,\bullet\right)$