Anisse
Groupe scolaire

مادة الرياضيات

الأسدوس الثاني

فرض رقم 1

الثانية باك ع ر

مدة الإنجاز: 2h

الموضوع 1 : (12ن)

لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(1+x)^n}$

نرمز بـ (C_n) لمنحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

الجزء الأول :

1- أ- أدرس تغيرات الدوال f_1 و f_2 (نهايات ،حساب مشتقة،جدول تغيرات) 1

ب- أدرس الوضع النسبي ل (C_1) و (C_2) وأنشئهما في نفس المعلم. 1

2- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) والمستقيمات ذات المعادلة $x=0$ و $x=1$ 1

3- أ- أثبت أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$ f_n تقبل قيمة دنوية u_n عند العدد n-1 1

ب- أثبت أن $\forall x\geq 0: f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$ واستنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية. 1

ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 1

الجزء الثاني :

لكل $x>\dfrac{1}{e}$ نضع $F(x)=\int_0^{\ln x} f_2(t)dt$

1- علل وجود $F(x)$ لكل $x>\dfrac{1}{e}$ 1

2- أثبت أن $\forall x\in]\dfrac{1}{e},1]: F(x)\leq x\left(1-\dfrac{1}{1+\ln x}\right)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$ 1,5

3- أ- أثبت أن $F(x)=\dfrac{x}{(1+\ln x)^2}-1+2\int_0^{\ln x} f_3(t)dt$ 1

ب- استنتج أن $\forall x\geq 1: F(x)\geq \dfrac{x}{(1+\ln x)^2}-1$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 1,5

ج- أثبت أن F تقابل من $\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ نحو $\mathbb{R}$. 0,5 + 0,5

الموضوع 2 : (8ن)

1- ليكن p عددا أوليا حيث p>2

أ- أثبت أن $\forall k\in\{1,2,....p-1\}: p/C_k^p$ 0,5

ب- بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}^*: n^p\equiv n[p]$ 0,5

2- نعتبر $a\in\mathbb{N}$ حيث $a\wedge p=1$ و نضع $A=\{k\in\mathbb{N}^*/a^k\equiv 1[p]\}$

أ- تحقق أن $(p-1)\in A$ (يمكن استعمال السؤال 1-أ) 1

نرمز بـ d لأصغر عناصر المجموعة A

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ أثبت أنه إذا كان r باقي قسمة n على d فـإن $a^n\equiv a^r[p]$ 1

ج-استنتج أن $\forall n\in A: d/n$ 1

3- نعتبر العدد $u_n=\underbrace{111..........11}_{n\text{مرة}}$ (كتابة u_n في نظمة العدد العشري)

أ- تحقق أن $9u_n=10^n-1$ 1

ب- باستعمال السؤال (1) أثبت أن $10^6\equiv 1[7]$ 1

ج- أثبت أن $6/n\Leftrightarrow 7/u_n$ 1