فرض محروس

ثانوية أنيس — 2SM — 2 heure

التمرين الأول : 4p

E مجموعة الحدوديات درجتها أصغر أو تساوي 2 والتي تحقق $P(0)=0$

1 - بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي 2

2 - حدد أساسا لـ E واستنتج $\dim E$ 2

التمرين الثاني 16p

1 - ليكن α عدد عقدي حل للمعادلة: $z^2+z+1=0$

تحقق أن: $\alpha \times \bar{\alpha} = 1$ و $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

2 - نعتبر المجموعة

$\mathbb{Z}[\alpha] = \{ a+b\alpha \,/\, (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \}$

أ - بين أن: $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ زمرة تبادلية

ب - بين أن: $\mathbb{Z}[\alpha]$ جزء مستقر في $(\mathbb{C}, \times)$

ج - بين أن: $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

د - بين أن: $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\bar{\alpha}]$

3 - نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي:

$$f : \mathbb{Z}[\alpha] \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$a+b\alpha \longmapsto a^2+b^2-ab$$

أ - بين أن: $f(z) = |z|^2$ ، $\forall z \in \mathbb{Z}[\alpha]$

ب - استنتج أن: $f(z)=0 \Leftrightarrow z=0$

ج - بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Z}[\alpha], \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \times)$

4 - لتكن G المجموعة المكونة من عناصر $\mathbb{Z}[\alpha]$ التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$

أ - بين أن: $f(G) = \{1\}$

ب - استنتج أن: $G = \{\alpha, -\alpha, 1, -1, 1+\alpha, -1-\alpha\}$

ج - بين $(\mathbb{Q}[\alpha], +)$ زمرة تبادلية

د - بين أن $(\mathbb{Q}[\alpha]^*, \times)$ زمرة تبادلية

هـ - استنتج أن $(\mathbb{Q}[\alpha], +, \times)$ جسم تبادلي

Bonne chance