مسألة (10 نقط)

الجزء(A) : I] 1) بين أن :

$$(\forall x \in]-1,+\infty[-\{0\}) : \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2} \quad (0.5 \text{ نقطة})$$

2) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ x-1-x\ln x \le 0$ (0.5 نقطة)

II] لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) أ- بين أن $(\forall x \in]-1,+\infty[-\{0\}) : \frac{x}{3(x+1)} \le \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \le \frac{x}{3}$ (0.75 ن)

ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و أن $f'(1) = -\frac{1}{2}$ (0.5 ن)

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) (0.75 نقطة)

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f (0.75 نقطة)

4) أرسم المنحنى (C_f) (0.75 نقطة)

الجزء(B) : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt \quad x \neq 0 \ ; \ x \neq 1 \\ F(0) = 0 \quad ; \quad F(1) = 0 \end{cases}$$

1) أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}-\{1\})\ \frac{2x\ln x}{x+1} \le F(x) \le x\ln x$ (0.75 نقطة)

ب- أدرس اتصال وقابلية اشتقاق F على يمين 0 (0.5 نقطة)

ج- أدرس قابلية اشتقاق F في النقطة 1 (0.75 نقطة))

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ (0.5 نقطة)

ب- بين أن $(\forall x \in]1,+\infty[)\ \ln x\ \ln(x+1) \le F(x) \le 2\ln x\ \ln(x+1)$ 0.75 ن

ج- بين أن المنحنى Γ_F يقبل عند $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل(0.75 ن)

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ (1 نقطة)

و أن $(\forall x \in D)\ F'(x) = \frac{(3x-1)\ln x}{x^2-1}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة F

4) أرسم المنحنى Γ_F (نأخذ $F\left(\frac{1}{3}\right) = -0,44$ و Γ_F يقبل نقطة انعطاف وحيدة في $I(1,9\ ;\ 1,2)$) (0.5 نقطة)

تمرين (3 نقط)

لكل عدد عقدي z يخالف i . نضع $f(z) = \frac{iz}{z-i}$

1) أ- بين أن $(f(z) \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (z \in i\mathbb{R})$ (0.5 نقطة)

ب- حدد المجموعة : $(E_1) = \{M(z) /\ f(z) \in \mathbb{R}\}$ (0.5 نقطة)

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 1-2z$ (0.5 نقطة)

3) نضع $z - i = re^{i\alpha}$

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد $f(z)-i$ (0.5 نقطة)

ب- حدد و أرسم المجموعتين $\zeta = \{M(z) /\ |f(z)-i| = \sqrt{2}\}$

و $D = \left\{M(z) /\ \arg(f(z)-i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$ (1 نقطة)