تصحيح الفرض الأول
الأسدس II .

السنة الدراسية 2010 - 2011

تمرين (المسألة).

=> جزء I.

لنبين أن: $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}$

لدينا

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2-1+1}{1+t}\,dt$$
$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x t-1+\frac{1}{1+t}\,dt$$
$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x t-1\,dt+\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt.$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^x+\frac{1}{x^2}\left[\ln(t+1)\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)+\frac{1}{x^2}\ln(x+1)$$
$$= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}.$$

- لنبين أن $x-1-x\ln x\le 0$

نضع الدالة $h(x)=x-1-x\ln x$

$h'(x)=1-\ln x-1=-\ln x.$

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

حسب جدول التغيرات

$\forall x>0 \quad h(x)<h(1)$

إذن $h(x)<0$

إذن $x-1-x\ln x\le 0$

الجزء II.

1) لنبين أن $\forall x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

$$\frac{x}{3(x+1)}\le\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt\le\frac{x}{3}$$

إذا كان $x>0$

لدينا $0<t<x$

$1<t+1<x+1$

$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{t+1}<1$

يعني $\frac{t^2}{x+1}<\frac{t^2}{t+1}<t^2$

$\forall x>0 \int_0^x \frac{t^2}{x+1}\,dt<\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,dt<\int_0^x t^2\,dt$

$\frac{1}{x+1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x<\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$

$\frac{x^3}{3x^2(x+1)}<\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,dt<\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x^2}$

إذن $\frac{x}{3(x+1)}<\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,dt<\frac{x}{3}$

- إذا كان $x\in]-1,0[$

لدينا $x<t<0$

$x+1<t+1<1$

$1<\frac{1}{t+1}<\frac{1}{x+1}$

إذا $t^2<\frac{t^2}{t+1}<\frac{t^2}{x+1}$

و $\forall x\in]-1,0[\quad x<0$

$\int_x^0 t^2\,dt\le\int_x^0 \frac{t^2}{t+1}\,dt\le\int_x^0 \frac{t^2}{x+1}\,dt$

$\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^0\le\int_x^0 \frac{t^2}{t+1}\le\frac{1}{x+1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^0$

$$\left(\frac{-x^3}{3}\right)\times\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt \leq \frac{-x^3}{3(x+1)}\times\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x}{3(x+1)} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt \leq \frac{x}{3}$$

وعليه $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$

لدينا

$$\boxed{\frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt < \frac{x}{3}}$$

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

ب- لنبين أن f قابلة للإشتقاق في 1 و $f'(1) = -\frac{1}{2}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}.$$

نضع $X = x-1$ تصبح

$$\lim_{X\to 0} \frac{\ln(X+1) - X}{X^2}$$

وحسب ما سبق.

$$\frac{\ln(X+1)-X}{X^2} = \frac{1}{X^2}\int_0^X \frac{t^2}{1+t}\,dt - \frac{1}{2}$$

إذن

$$\frac{X}{3(X+1)} - \frac{1}{2} < \frac{\ln(X+1)-X}{X^2} < \frac{X}{3} - \frac{1}{2}.$$

ونلاحظ أن

$$\lim_{X\to 0} \frac{X}{3(X+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{X\to 0} \frac{X}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

إذن

$$\lim_{X\to 0} \frac{\ln(X+1) - X}{X^2} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

وبالتالي f قابلة للإشتقاق في 1 بحيث $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

ج- الفروع اللانهائية لـ C_f.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x-1} = 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} \times \ln x = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty.$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x - x\ln x - 1}{x(x-1)^2} = \frac{h(x)}{x(x-1)^2} \leq 0$$

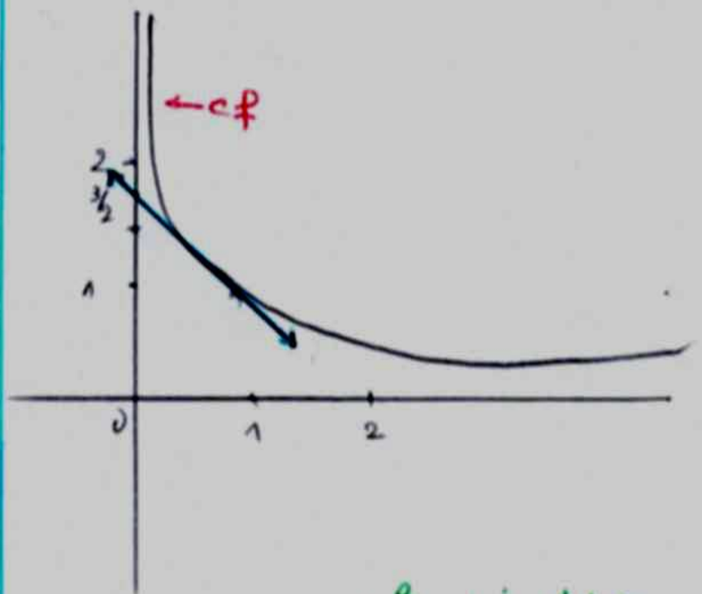
لأن $\forall x > 0 \quad h(x) \leq 0.$

د- جدول التغيرات

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

4- إنشاء المنحنى C_f.

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ مماس المنحنى عند 1.



⇐ الجزء B.

$I=[0,+\infty[$

$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt & x\neq 0,\ x\neq 1 \\ F(0)=0,\ F(1)=0 \end{cases}$$

لنبين ان $\frac{2x\ln x}{x+1}\leq F(x)\leq x\ln x$

← $x>1$

$x<t<x^2$

← f دالة متناقصة.

$f(x^2)<f(t)<f(x)$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}<\frac{\ln t}{t-1}<\frac{\ln x}{x-1}$$

$\forall (x,x^2)\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ $x<x^2$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}\int_x^{x^2}1\,dt<\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{t-1}dt<\int_x^{x^2}1\,dt\times\frac{\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2\ln x}{x^2-1}(x^2-x)<F(x)<\frac{\ln x}{x-1}(x^2-x)$$

$$\frac{2x\ln x}{x+1}<F(x)<x\ln x$$

← $x\in]0,1[$

لدينا $x^2<t<x$

وبما ان f متناقصة.

$f(x)<f(t)<f(x^2)$

$$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{\ln t}{t-1}<\frac{2\ln x}{x^2-1}$$

$\forall (x,x^2)\in]0,1[$ $x^2<x$

$$\frac{\ln x}{x-1}\int_{x^2}^{x}1\,dt\leq\int_{x^2}^{x}\frac{\ln t}{t-1}dt\leq\frac{2\ln x}{x^2-1}\int_{x^2}^{x}1\,dt$$

$$\frac{\ln x}{x-1}(x-x^2)\leq -F(x)\leq\frac{2\ln x}{x^2-1}(x-x^2)$$

$$\frac{2x\ln x}{x+1}\leq F(x)\leq x\ln x$$

وعليه $\forall x\in]0,+\infty[$ لدينا

$$\frac{2x\ln x}{x+1}\leq F(x)\leq x\ln x$$

ب- اتصال وقابلية اشتقاق F في يمين 0

$\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln x}{x+1}=0$

لأن $\lim_{x\to 0}x\ln x=0$

اذا $\lim_{x\to 0}F(x)=0=F(0)$

⇐ F متصلة على يمين 0.

و $\forall x\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$

$$\frac{2\ln x}{x+1}\leq\frac{F(x)}{x}\leq\ln x$$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{x+1}=-\infty$

$\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$

اذن $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=-\infty$

⇐ F غير قابلة للاشتقاق في يمين 0.

لدينا اذا كان $x > 1$

$$\frac{2x\ln x}{x+1} < F(x) < x\ln x.$$

$$\frac{2x\ln x}{(x^2-1)} \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq \frac{x\ln x}{x-1}$$

$$\frac{2x\ln x}{x^2-1} \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{x\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

لأن $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x+1} = 1$ و $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{x-1} = 1$$

اذن $\lim_{x\to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1$. (1)

اذا كان $0 < x < 1$

$$\frac{x\ln x}{x-1} < \frac{F(x)}{x-1} < \frac{2x\ln x}{x^2-1}$$

بالمثل

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x\ln x}{x^2-1} = 1$$

اذن $\lim_{x\to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 1$ (2)

من 1 و 2 لدينا F قابلة للإشتقاق على يمين 1 و يسار 1

و $F'_d(1) = F'_g(1) = 1$

$\Leftarrow$ F قابلة للإشتقاق في 1

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x\ln x}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} \times \ln x = +\infty$$

بحيث $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$

ب - لنبين أن $\forall x > 1$

$$\ln(x+1)\ln x < F(x) < 2\ln(x+1)\ln x$$

لدينا

$$x < t \leq x^2$$

$$\ln x < \ln t < 2\ln x$$

$$\frac{\ln x}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{2\ln x}{t-1}$$

$\forall (x, x^2) \in]1, +\infty[^2$ $x < x^2$

و بالتالي

$$\ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} \leq 2\ln x \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$\ln x\,[\ln(t-1)]_x^{x^2} \leq F(x) \leq 2\ln x\,[\ln(t-1)]_x^{x^2}$$

$$\ln x\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right) \leq F(x) \leq 2\ln x\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right)$$

$$\ln x\ln(x+1) \leq F(x) \leq 2\ln x\ln(x+1)$$

ج - الفرع الشلجمي ل C_F

$$\frac{\ln x.\ln(x+1)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{2\ln x\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x.\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=0$

اذن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\cdot\ln(x+1)}{x}=0$$

ومن جهة ثانية

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x\,\ln(x+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=0$$

اذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}=0$

وعليه C_F يقبل فرعا شلجميا نحو محور الأفاصيل.

3. قابلية اشتقاق F.

$t \xrightarrow{f} \frac{\ln t}{t-1}$ متصلة اذن تقبل دالة أصلية G بحيث

$F(x)=G(x^2)-G(x)$.

$x \longmapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

$x \longmapsto x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $u(\mathbb{R}_+^*)\subset\mathbb{R}_+^*$

$x \longmapsto GoU$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

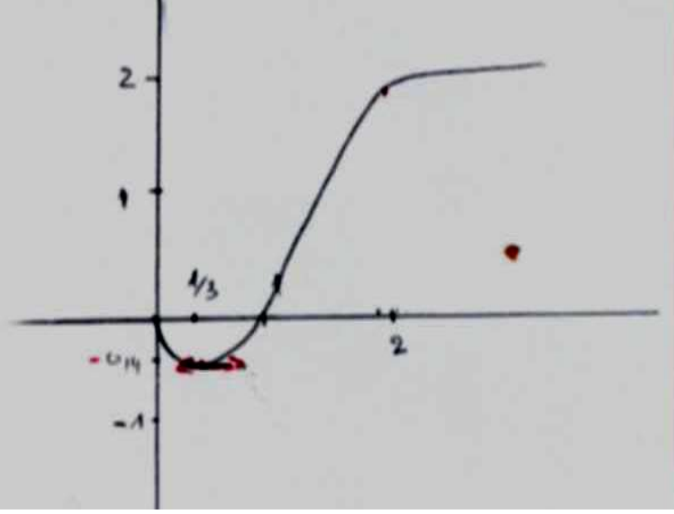
اذن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

$$F'(x) = 2x f(x^2) - f(x)$$
$$= 2x \times \frac{2\ln(x)}{x^2-1} - \frac{\ln x}{x-1}$$
$$= \frac{4x\ln x - x\ln x - \ln x}{x^2-1}$$
$$= \frac{\ln x}{x^2-1}(3x-1).$$

← جدول تغيرات F.

x	0		$1/3$		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$F'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$	$-0{,}4$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

← المنحنى.



تمرين 2

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}$$

لنبين أن $f(z)\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

لدينا

$f(z)\in i\mathbb{R}$

تعني

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{i\bar z}{\bar z + i}$$

$\Leftrightarrow iz(\bar z + i) = i\bar z(z-i)$

$\Leftrightarrow iz\bar z - z = i\bar z z + \bar z$

$\Leftrightarrow z + \bar z = 0$

$\Leftrightarrow Ré(z) = 0$

$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$

ب- تحديد المجموعة $E_1=\{M(z)/f(z)\in\mathbb{R}\}$

$f(z)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar z}{\bar z + i}$

تعني

$$\frac{iz}{z-i} = \frac{-i\bar z}{\bar z + i}$$

$\Leftrightarrow iz(\bar z + i) = -i\bar z(z-i)$

$\Leftrightarrow iz\bar z - z = -i\bar z z - \bar z$

$\Leftrightarrow 2iz\bar z - (z - \bar z) = 0$

$\Leftrightarrow 2i|z|^2 - 2i\,Im(z) = 0$

نضع

$z = x + iy$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

إذن E_1 هي الدائرة الذي مركزها $O(0, \frac{1}{2})$ وشعاعها $R = 1/2$.

محرومة من $A(0,1)$.

2 - حل المعادلة $f(z) = 1 - 2z$

$f(z) = 1 - 2z$

تعني

$$\frac{iz}{z-i} = 1 - 2z$$

$iz = (1-2z)(z-i)$

$iz = z - i - 2z^2 + 2iz$

$0 = z + 2iz - 2z^2 - iz - i$

وبالتالي:

$2z^2 - iz - z + i = 0$

$2z^2 - z(1+i) + i = 0$

من درجة 2 شرط.

$\Delta = 2i - 8i = -6i = 3(-2i)$
$= (\sqrt{3}(1-i))^2$

وعليه.

$$z_1 = \frac{1+i-\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$z_2 = \frac{1+i+\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right).$$

$S = \left\{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)\right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)\right)\right\}.$

ب- $f(z) - i = \frac{iz - iz - 1}{z-i} = \frac{-1}{z-i}$

$= -\frac{1}{r}e^{-i\alpha}$

$= \frac{e^{i(\pi-\alpha)}}{r}$

$M(z)\in\mathcal{S} \Leftrightarrow |f(z) - i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow |z - i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

نضع $A(i)$

$\Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$

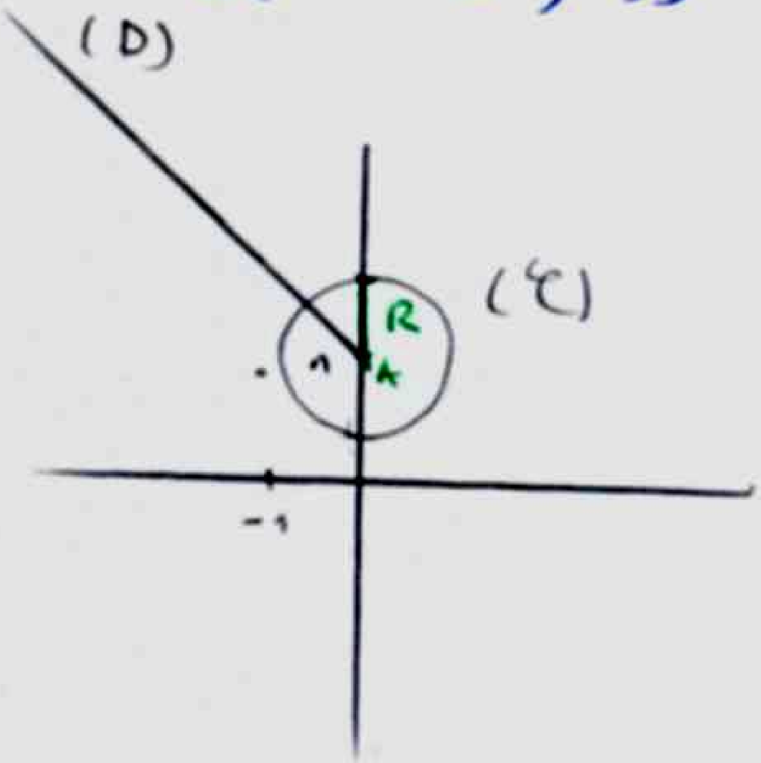
$\mathcal{S}$ هي الدائرة التي مركزها A وشعاعها $\sqrt{2}$

$\Rightarrow \pi - \alpha \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\Rightarrow \alpha \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$

$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

اذن (D) نصف المستقيم الذي معامل الموجه $tg(\frac{3\pi}{4}) = -1$ والمحدود من $A(i)$.



تم انجازه تحت إشراف

الأستاذ : لمعاني

من طرف التلميذة : محرد فاطمة الزهراء.

2012 - 2013.