

ليكن n عددا طبيعيا من \mathbb{N}^* . نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بما يلي
 $f_n(x) = (1-x)^n e^{2x}$ و ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد
 (O, \vec{i}, \vec{j}) بحيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(I) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$ و أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

(2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

(3) أحسب $f'_n(x)$ و أجز جدول تغيرات كل من الدالتين f_1 و f_2

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) ; (C_2) و أرسمهما

(II) نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} dt$

(1) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0]$

$$\text{و أن } F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

ب- أدرس منحنى تغيرات الدالة F

(2) أ- بين أن $\frac{1}{2} \int_x^0 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_x^0 f_1(t) dt$ ($\forall x < 0$)

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_x^0 f_1(t) dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x}$

ج- نقبل أن $F(x)$ تقبل نهاية l عند $-\infty$ بين أن $\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$

(III) نضع $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ لكل عددا طبيعيا n من \mathbb{N}^*

(1) أ- بين أن $U_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[0, 1]$

ج- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

(2) أ- بين أن $U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- استنتج ب cm^2 مساحة الحيز (Δ) المحصور بين المنحنيين

(C_1) ; (C_2) و المستقيمين $x=0$; $x=1$

(3) بين أن $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}$ ($\forall n \geq 2$) و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n U_n$

(4) ليكن a عددا حقيقيا موجبا و بحيث $a \neq U_1$.

نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$V_1 = a \text{ و } V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} V_n \text{ } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \text{ ثم نضع } d_n = |V_n - U_n|$$

أ- بين أن $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) و بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$

ب- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ متباعدة

(IV) نضع $W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$ لكل عدد طبيعي n من \mathbb{N}^*

(1) أ- بين أن $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- بين أن $W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) و استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$

(2) أ- بين أن $W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- أحسب مشتقة الدالة $x \rightarrow \left(\frac{3}{2} - x\right) e^{2x}$ و بين أن $W_1 = \frac{1}{2}(e^2 - 3)$

ج- بين أن $W_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} \right)$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

د- استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}$