من إنجاز التلميذة: جهاد المرلوزي	حل الفرض المحروس رقم ① للأسدس الثاني	تحت إشراف الأستاذ: بوشعيب الماني

-I-

1- * لنبين أن $\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = 0$

نضع $x = tm$

إذن $x \to -\infty \Rightarrow t \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim_{x \to -\infty} (1-x)^n e^{2x}$$
$$= \lim_{t \to -\infty} (1-tm)^n e^{2tm}$$
$$= \lim_{t \to -\infty} ((1-tm)e^{2t})^m$$
$$= \lim_{t \to -\infty} (e^{2t} - \frac{m}{2}(2te^{2t}))^m$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = 0}$$

[لأن $\lim_{t \to -\infty} e^{2t} = \lim_{t \to -\infty} 2te^{2t} = 0$]

* لنحسب النهاية $\lim_{x \to +\infty} f_m(x)$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim_{x \to +\infty} (1-x)^n e^{2x}$

إذا كان n زوجي:

لدينا $\lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$

وعليه $\lim_{x \to +\infty} (1-x)^n = +\infty$

ونعلم $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

إذن

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty}$$

إذا كان m فردي:

لدينا $\lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$

وعليه $\lim_{x \to +\infty} (1-x)^n = -\infty$

نعلم أن: $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = -\infty$$

② الفرع النهائي للمنحنى (C_m) عند $+\infty$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = \infty$

لنحسب $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_m(x)}{x}$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-x)^n e^{2x}}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1-x)^n \times 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}$$

إذا كان m زوجي:

لدينا $\lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} (1-x)^n = +\infty$

ونعلم $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = +\infty}$$

إذا كان n فردي:

$$\lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} (1-x)^n = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = -\infty}$$

$\forall m \in \mathbb{N}^* \lim_{x \to +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \infty$

$\Leftarrow$ (C_m) يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3- حساب $f_m'(x)$

$$f_m'(x) = ((1-x)^n e^{2x})'$$

$f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1}e^{2x} + 2(1-x)^n e^{2x}$

$f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}(-n+2(1-x))$

$$\boxed{f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}(2-2x-n)}$$

بالنسبة للدالة f_1

$f_1'(x) = (1-x)^0(2-2x-1)e^{2x}$

$= (1-2x)e^{2x}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+		0	−	
$f_1(x)$	0 ↗		$\frac{e}{2}$	↘	$-\infty$

بالنسبة للدالة f_2

$f_2'(x) = (1-x)e^{2x}(2-2x-2)$

$= -2x(1-x)e^{2x}$

$$\boxed{f_2'(x) = 2x(x-1)e^{2x}}$$

جدول التغيرات.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_2'(x)$	+	0 −	0	+
$f_2(x)$	0 ↗	1 ↘	0 ↗	$+\infty$

4- لندرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2).

$f_2(x)-f_1(x) = (1-x)^2e^{2x}-(1-x)e^{2x}$

$f_2(x)-f_1(x) = (1-x)e^{2x}(1-x-1)$

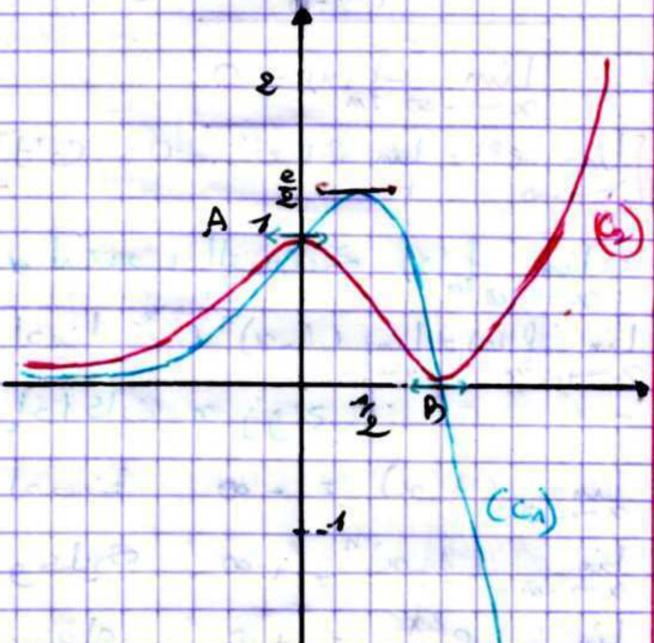
$= x(x-1)e^{2x}$

$f_2(x)-f_1(x) = x(x-1)e^{2x}$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	+	0	−	0	+
الوضع النسبي لـ (C_2) و (C_1)	C_2 فوق C_1	A	C_2 تحت C_1	B	C_2 فوق C_1

بحيث: $A(0,1)$ $B(1,0)$

إنشاء المنحنيين C_1 و C_2.



II- 1- أ- لنبين أن F قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ لدينا:

$t \mapsto f_1(t)$ متصلة على $]-\infty,0[$

$t \mapsto \frac{1}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty,0[$

إذن $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty,0[$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ تقبل دالة أصلية G

حيث $F(x) = G(0) - G(x)$

ولدينا $f_1(t)$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0]$

و $\frac{1}{1+e^{2t}}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0]$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0]$

وعليه فإن $G(x)$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0]$

إذن $F(x)$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0]$

* لنثبت أن $F'(x) = \frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

لدينا $F'(x) = -G'(x)$

إذن $= -\frac{f_1(x)}{1+e^{2x}}$

وعليه $= -\frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$$\boxed{F'(x) = \frac{(x-1)\,e^{2x}}{1+e^{2x}}}$$

ب- لندرس منحنى تغيرات الدالة F

لدينا $x \in]-\infty, 0[$

$x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 < 0$

$x < 0 \Rightarrow e^{2x} > 1 > 0$

$\Rightarrow e^{2x} + 1 > 0$

إذن $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} < 0$

$\Leftarrow$ F تناقصية قطعا على $]-\infty,0]$

ج-1- لنبين أن $\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$

لدينا $x \leq t \leq 0 \Rightarrow 2x \leq 2t \leq 0$

$x \leq t \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^{2t} \leq e^0 = 1$

$\Rightarrow 1+e^{2x} \leq 1+e^{2t} \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

ولدينا $x \leq t \leq 0 \Rightarrow f(t) > 0$

حسب جدول التغيرات.

إذن

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)dt}{1+e^{2t}} \leq \int_x^0 \boxed{\frac{f_1(t)dt}{1+e^{2x}}}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt}$$

ب-

لدينا $\int_x^0 f_1(t)dt = \int_x^0 (1-t)e^{2t}dt$

$= \left[(1-t)\times\frac{1}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \int_x^0 -\frac{1}{2}e^{2t}$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 + \int_x^0 \frac{1}{2}e^{2t}dt$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_x^0$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$$\boxed{\int_x^0 f_1(t)dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}}$$

ج- نضع $\lim_{x\to-\infty} F(x)=l$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f_1(t)\,dt$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{4}-\frac{2}{4}xe^{2x}\frac{3}{4}e^{2x}$$

$$=\frac{3}{4}$$

[لأن $\lim_{x\to-\infty}2xe^{2x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0$]

ونعلم أن

$$\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)\,dt\le F(x)\le\frac{1}{1-e^{x}}\int_x^0 f_1(t)\,dt$$

حسب خاصيات النهايات و الترتيب

نجد

$$\boxed{\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}}$$

III - 1- أ- لنبين أن $U_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

لدينا $U_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

$0\le x\le 1\Rightarrow -1\le -x\le 0$

$\Rightarrow 1-x\ge 0$ و $e^{2x}>0$

$\Rightarrow (1-x)^n e^{2x}\ge 0$

$\Rightarrow \int_0^1(1-x)^n e^{2x}\,dx>0$

$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)\,dx>0$

$\Rightarrow \boxed{U_n>0\quad \forall n\in\mathbb{N}}$

ب- لندرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على $[0,1]$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=(1-x)^{n+1}e^{2x}-(1-x)^n e^{2x}$

$=(1-x)^n e^{2x}(1-x-1)$

$=-x(1-x)^n e^{2x}$

لدينا $0\le x\le 1$

يعني أن $-x\le 0$ و $e^{2x}>0$ و $(1-x)^n\ge 0$

إذن $\boxed{\forall x\in[0,1]\quad f_{n+1}(x)-f_n(x)\le 0}$

ج- لنستنتج أن $(U_n)_n$ تناقصية

لدينا $f_{n+1}(x)-f_n(x)\le 0$

$f_{n+1}(x)\le f_n(x)$

$\int_0^1 f_{n+1}(x)\le\int_0^1 f_n(x)$

$$\boxed{U_{n+1}\le U_n}$$

إذن U_n متتالية تناقصية.

2- أ- لنبين أن $U_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}U_n$

نضع $u:\ x\mapsto(1-x)^{n+1}$

$v:\ x\mapsto\frac{1}{2}e^{2x}$

u و v متصلتين على $[0,1]$

u و v قابلتين للإشتقاق على $[0,1]$

u' و v' متصلتين على $[0,1]$

لدينا $U_{n+1}=\int_0^1(1-x)^{n+1}e^{2x}\,dx$

$=[u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 v(x)u'(x)$

$=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}\int_0^1(1-x)^n e^{2x}$

$$\boxed{U_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}U_n}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

$S=\int_0^1|f_2(x)-f_1(x)|\,dx\ u.a$

$=\int_0^1 f_1(x)-f_2(x)\,dx\ u.a$

$=\int_0^1 f_1(x)\,dx-\int_0^1 f_2(x)\,dx\ u.a$

$=(U_1-U_2)\ u.a.$

إذن $S = u_1 - u_2$

وحسب السؤال (2.أ) نعلم أن

$u_2 = -\frac{1}{2} + u_1 \Rightarrow -u_2 + u_1 = \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\, u.a = \frac{1}{2}\, \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

وعليه $\boxed{S = 2\ cm^2}$

3- لنبين أن $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$

لدينا حسب الأسئلة 1-أ، 1-ج

و 2-أ

$0 \le u_{n+1} \le u_n \Rightarrow 0 \le -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n \le u_n$

$\frac{1}{2} \le \frac{n+1}{2} u_n$ و $-\frac{1}{2} \le \left(1 - \frac{n+1}{2}\right) u_n$

إذن $\frac{1}{n+1} \le u_n$ و $u_n \le \frac{1}{n-1}$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

ب- تحديد $\lim_{n \to +\infty} n u_n$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n$

بما أن $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$

ولدينا $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

إذن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

ولدينا $\frac{n}{n+1} \le n u_n \le \frac{n}{n-1}$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n-1}$

$= 1$

فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} n u_n = 1}$

4- من أجل $n = 1$: $d_1 = \frac{1!}{2^0} d_1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

لنبين أن $d_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$

لدينا $d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}|$

$= \left| -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} u_n \right|$

$= \left| \frac{n+1}{2} v_n - \frac{n+1}{2} u_n \right|$

$= \frac{n+1}{2} |v_n - u_n|$

إذن $= \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

$\frac{n+1}{2} d_n = \frac{(n+1) n!}{2 \times 2^{n-1}} d_1$

$d_{n+1} = \frac{(n+1)}{2^n} d_1$

وعليه فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$

لنبين أن $\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

نعلم أن $d_{n+1} = \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $\frac{n+1}{2} \ge 2$

إذا $\forall n \ge 3\ d_{n+1} \ge 2 d_n$

أي $\frac{d_{n+1}}{d_n} \ge 2$

ومنه فإن $\forall n \ge 3$

$\frac{d_n}{d_{n-1}} \times \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \times \dots \frac{d_4}{d_3} \ge 2^{n-3}$

إذن $\frac{d_n}{d_3} \geq 2^{n-3}$

أي $\forall n\geq 3 \quad d_n \geq d_3 \times 2^{n-3}$

بما أن $2>1$

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n-3} d_3 = +\infty$

وحسب مصاديق التقارب

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty}$

ب- نفترض أن $(V_n)_{n\geq1}$ متتالية متقاربة نعلم أن $(U_n)_{n\geq1}$ متقاربة ولدينا $d_n = |V_n - U_n|$

إذن d_n متقاربة وهذا تناقض

إذن $(V_n)_{n\geq1}$ متتالية متباعدة.

IV - 1 - أ. من أجل $n=1$

$\frac{2^0}{1!}\leq 1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $\frac{2^{n-1}}{n!}\leq 1$

لنبين أن $\frac{2^n}{(n+1)!}\leq 1$

$n\geq 1 \Rightarrow n+1\geq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{n+1}\leq 1$

ولدينا $\frac{2^{n-1}}{n!}\leq 1$

إذن $\frac{2\times 2^{n-1}}{n!(n+1)}\leq 1$

وعليه $\frac{2^n}{(n+1)!}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{2^{n-1}}{n!}\leq 1$

1 - ب. لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

لدينا $W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$

و $\frac{2^{n-1}}{n!}\leq 1 \Rightarrow W_n\leq 2U_n$

مع $U_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}dx$

ولدينا $0\leq x\leq 1 \Rightarrow e^{2x}\leq e^2$

ونعلم أن $(1-x)^n\geq 0$

إذن $(1-x)^n e^{2x} \leq (1-x)^n e^2$

$U_n \leq e^2\int_0^1 (1-x)^n dx$

$U_n\leq e^2\left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1$

إذن $U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

$\Rightarrow \boxed{W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}}$

لنستنتج أن $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

لدينا $0\leq W_n\leq \frac{2e^2}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2e^2}{n+1}=0$

إذن حسب خاصيات النهايات والترتيب

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} W_n = 0}$

2 - أ. لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad W_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

لدينا $W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}U_{n+1}$

$$W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}U_n\right)$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+1)\,n!\times 2}U_n$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^n}{n!}U_n$$

$$= -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$$

إذن $\boxed{W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n}$

ب- لنحسب مشتقة $\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

$$\left(\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}\right)' = \left(\frac{3}{2}-x\right)'e^{2x} + \left(\frac{3}{2}-x\right)\left(e^{2x}\right)'$$

$$= -e^{2x} + 2\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + (3-2x)e^{2x}$$

$$= 2e^{2x}(1-x) = 2f_1(x)$$

إذن $\left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$ هي دالة أصلية لـ $2f_1(x)$

نضع $V(x) = \left(\frac{3}{2}-x\right)e^{2x}$

لدينا $W_1 = \frac{2}{1}U_1$

$$= 2\int_0^1 f_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2f_1(x)\,dx = [V(x)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-3)$$

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2}(e^2-3)}$$

ج- لنبين أن $W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$

من أجل $n=1$ لدينا

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

$= \frac{1}{2}(e^2-3)$ كل قه صحيحة

نفترض أن

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$$

لنبين

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

لدينا $W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

حسب افتراض التراجع

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right)$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} - \frac{2^n}{(n+1)!}\right)$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1}\frac{2^k}{k!}\right)$$

د- لنستنتج نهاية $\sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

أي أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!}\right) = 0$

إذن $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n}\frac{2^k}{k!} = e$

انتهى.