تصحيح الفرض المحروس رقم 1

الدورة II

التمرين II: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

① لنبين أن:

$(\forall x\in\mathbb{R}):\quad \sin^{2n+1}x=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x$

لدينا:

$$\sin^{2n+1}x=\sin x(\sin^2 x)^n$$
$$=\sin x\,(1-\cos^2x)^n$$
$$=\sin x\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-\cos^2x)^k$$
$$=\sin x\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k.\cos^{2k}x$$

وبالتالي:

$(\forall x\in\mathbb{R})$; $\boxed{\sin^{2n+1}x=\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k\sin x\cos^{2k}x}$

(2) حساب التكامل I_k لكل k من $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$I_k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}-\cos' t.\cos^{2k}t\,dt$$
$$=\left[-\frac{\cos^{2k+1}t}{2k+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$
$$=\frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

وعليه فإن:

$(\forall k\in\mathbb{N})$; $\boxed{I_k=\frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}}$

(3) استنتاج التكامل المقترح:

لدينا:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^{2n+1}t\,dt$$

وحسب السؤال السابق (1) فإن:

$(\forall t\in\mathbb{R})$; $\sin^{2n+1}t=\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k\sin t.\cos^{2k}t$

وبالتالي:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin^{2n+1}t\,dt=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin t\cos^{2k}t\,dt$$

وحسب السؤال (2) نجد أن:

$$I=\sum_{0}^{n}C_n^k(-1)^k.\ \frac{-\cos^{2k+1}x}{2k+1}$$

إذن:

$$\boxed{I=-\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(-1)^k}{2k+1}.\cos^{2k+1}x}$$

التمرين III:

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. ونضع:

$$\begin{cases}u_0=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ u_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx\end{cases}$$

① حساب u_0:

لدينا:

$$u_0=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1(\operatorname{Arctg}x)'\,dx$$
$$=[\operatorname{Arctg}x]_0^1$$
$$\boxed{u_0=\frac{\pi}{4}}$$

② نبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}+u_n=\frac{1}{2n+1}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

لدينا:

$$u_{n+1}+u_n=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx+\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^{2n}(1+x^2)}{(1+x^2)}\,dx$$
$$=\int_0^1x^{2n}\,dx$$
$$=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

وعليه فإن:

$(\forall n\in\mathbb{N})$; $\boxed{u_{n+1}+u_n=\frac{1}{2n+1}}$

قيمة u_1 :

حسب النتيجة السابقة: $u_0 + u_1 = \frac{1}{2\times 0+1}$

أي أن: $u_1 = \frac{1}{1} - u_0$

إذن: $\boxed{u_1 = 1 - \frac{\pi}{4}}$

و $u_1 + u_2 = \frac{1}{2\times 1+1}$

بمعنى أن: $u_2 = \frac{1}{3} - u_1$

$= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$

وبالتالي: $\boxed{u_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$

3) نبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : 0 < u_n < \frac{1}{2n+1}$

$(\forall x\in]0,1])$ $1+x>1$

و $x^{2n}>0$

$\Leftarrow$ $\frac{x^{2n}}{1+x}>0$

أي: $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx>0$

وعليه $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; (1) $u_n>0$

ومنه نستنتج أن: $u_{n+1}>0$

أي: $u_n+u_{n+1}>u_n$

وعليه: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; (2) $u_n < \frac{1}{2n+1}$

من العلاقتين (1) و (2) يكون لدينا:

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\boxed{0<u_n<\frac{1}{2n+1}}$

وبما أن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4) لتكن $(v_n)_n$ المتتالية بحيث:

$v_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

أ- نبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

لدينا: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^{4} + \cdots + (-1)^n x^{2n}$

$= \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1-(-x^2)}$

$\boxed{\sum_{0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}}$; $n\in\mathbb{N}$

ب- تقارب المتتالية $(v_n)_n$ ونهايتها:

لدينا: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

ومنه: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$

مع العلم أن: $\int_0^1 x^{2k}dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$

وعليه: $v_n = u_0 + (-1)^n u_{n+1}$

$= \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$

وبما أن: $\forall n\in\mathbb{N}$ $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2n+3}$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$

وعليه فإن $(v_n)_n$ متقاربة و:

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\pi}{4}$

التمرين III :

(I) لتكن f الدالة بحيث :

$$f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$$

1) أ- حساب النهايات المطلوبة:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+x^2}$

$$=\lim_{+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$$=+\infty$$

[لأن $\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$]

ولدينا $\lim_{-\infty}\frac{e^x}{1+x^2}=0$

[لأن $\lim_{-\infty} e^x=0$ و $\lim_{-\infty} 1+x^2=+\infty$]

ب- الفرع اللانهائي لـ $\mathcal{C}$ بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim_{+\infty} f(x)=+\infty$

ولدينا $\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{(x^2+1)x}$

يعني $=\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3+x}$

إذن $=\lim_{+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$

ومنه $=+\infty$

[لأن $\lim_{+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$]

إذن $\mathcal{C}$ يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2- حساب $f'(x)$ ودراسة تغيرات الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f'(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$

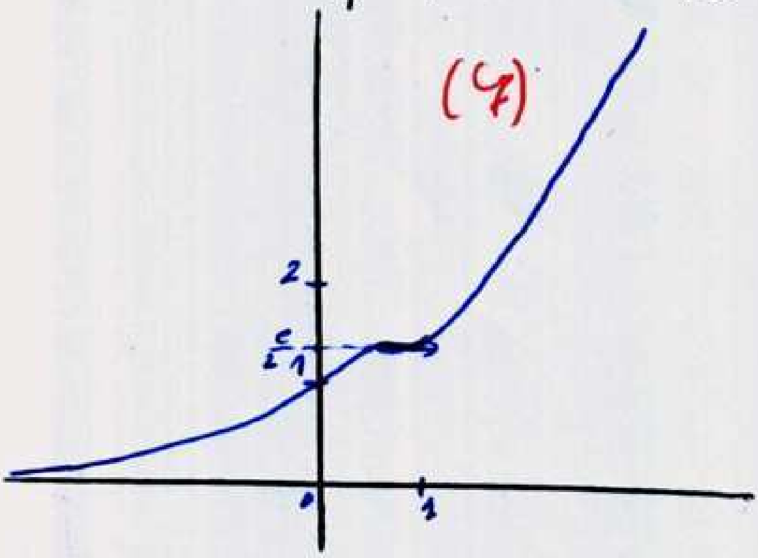
$$=\frac{e^x+x^2e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2e^x}{(1+x^2)^2}\geq 0$$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) منحنى الدالة f :



(II) نعتبر الدالة F للمتغير الحقيقي x بحيث:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

1) أ- نبين أن: $(\forall x>0)(\forall t\in[0,x]);\ f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

$(\forall t\in[0,x])\ ;\quad 1+t^2\leq 1+x^2$

أي أن $\frac{1}{1+t^2}\geq\frac{1}{1+x^2}$

ومنه $\frac{e^t}{1+t^2}\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

وعليه $\begin{pmatrix}\forall t\in[0,x]\\ \forall x>0\end{pmatrix};\ \boxed{f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}}$

ب- نستنتج أن:

$$(\forall x>0):\ F(x)\geq f(x)-\frac{1}{1+x^2}$$

لدينا حسب الجزء أ من السؤال 1)

$\begin{pmatrix}\forall x>0\\ \forall t\in[0,x]\end{pmatrix}:\ f(t)\geq\frac{e^t}{1+x^2}$

ومنه: $(x>0)\ \int_0^x f(t)dt\geq\int_0^x\frac{e^t}{1+x^2}dt$

يعني أن

$$F(x) \geq \frac{1}{1+x^2}\cdot[e^x]_0^x$$

$$F(x) \geq \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

وعليه $(\forall x>0)$ $\boxed{F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}}$

وبما أن $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim_{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$

فإن $\boxed{\lim_{+\infty} F(x) = +\infty}$

2 - الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ) عند $+\infty$:

لدينا $\forall x>0: F(x) \geq f(x) - \frac{1}{1+x^2}$

ومنه $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x+x^3}$

وبما أن $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

و $\lim_{+\infty} \frac{1}{x^3+x} = 0$

فإن $\lim_{+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

وهذا يعني أن (Γ) له فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

ج) رتابة الدالة F:

لدينا $t \mapsto f(t)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية Φ معرفة على $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ $F(x) = \Phi(x) - \Phi(0)$

وبما أن $\Phi(x)$ دالة قابلة للاشتقاق

فإن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $(\forall x \in \mathbb{R})$ $F'(x) = \Phi'(x) = f(x) > 0$

ومنه F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ- نثبت أن $(\forall x<0)$ $F(x) \geq \text{Arctg}\, x$

نعتبر من أجل ذلك الدالة φ المعرفة كما يلي:

$(\forall x\in]-\infty,0[): \varphi(x) = F(x) - \text{Arctg}\, x$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^-$.

و $(\forall x\in \mathbb{R}^{-*}): \varphi'(x) = F'(x) - \text{Arctg}'(x)$

$$= f(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

يعني أن

إذن: $\forall x<0$ $\varphi'(x) = \frac{e^x-1}{1+x^2}$

وبما أن: $x<0$ أي $e^x<1$

فإن $\varphi'(x)\leq 0$. وهذا يعني أن φ تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$.

ومنه

$(\forall x<0) \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

$$F(x) - \text{Arctg}\,x \geq 0$$

$(\forall x<0)$ $\boxed{F(x)\geq \text{Arctg}\,x}$

ب- نقبل أن F لها نهاية منتهية عند $-\infty$: نبين أن $-\frac{\pi}{2} \leq \ell < 0$

لدينا $(\forall x\in \mathbb{R})$: $f(x)>0$

$\Leftarrow$ $(x<0)$؛ $\int_0^x f(t)\,dt < 0$

أي $\boxed{F(x)<0}$

إذن $(\forall x<0)$: $\text{Arctg}\,x \leq F(x) < 0$

وعليه $\lim_{-\infty} \text{Arctg}\,x \leq \lim_{-\infty} F(x) \leq 0$

أي أن $\lim_{-\infty}\text{Arctg}\,x \leq \ell \leq 0$

وبما أن $\lim_{-\infty}\text{Arctg}\,x = -\frac{\pi}{2}$

فإن $\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \ell < 0}$

وهذا هو المطلوب.

مع أطيب التمنيات
حسن الإدريسي