

## التمرين الأول :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2\sqrt[3]{1 - x^3} + 1}{3x + \sqrt{x^2 + 1} - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{\sqrt{x + 3} - \sqrt[3]{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2E(x)}{x + E(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 E\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{1 + 2x} - 1 - x)}{x^2}$$

## التمرين الثاني :

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{n}$  ( يمكن وضع  $t = \sqrt[n]{x+1}$  )

(2) استنتج النهايتين  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} \sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

(3) بين أن  $(\forall n \geq 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} \sqrt[3]{x+1} \times \dots \times \sqrt[n]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

## التمرين الثالث :

$$\begin{cases} f(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right) E\left(\frac{a}{x}\right) & ; x < 0 \\ f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{2\sqrt{\tan x} - \sqrt{2\sin 2x}}{x^2 \sqrt{x}} & ; x > 0 \end{cases}$$

ليكن  $a$  عددا من  $\mathbb{R}^*$  ونعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :

(1) بين أن  $(\forall x < 0) \left| f(x) - \frac{a}{x} \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right| \leq \left| \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right|$  و استنتج  $f$  متصلة على يسار النقطة 0

(2) هل الدالة  $f$  متصلة في النقطة 0 ؟

## التمرين الرابع :

لتكن  $f$  دالة متصلة على المجال  $[0,1]$  و بحيث  $f(0) = f(1)$  و نضع  $G(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{3}\right)$

(1) أدرس اتصال الدالة  $G$  على المجال  $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

(2) أحسب  $G(0) + G\left(\frac{1}{3}\right) + G\left(\frac{2}{3}\right)$  و استنتج أن :  $f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)$   $(\exists \alpha \in \left[0, \frac{2}{3}\right])$

## التمرين الخامس :

(1) بين أن :  $(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall b \in \mathbb{R}^*) \arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$

(2) أحسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}(\arctan\sqrt{x+1} - \arctan\sqrt{x})$

(3) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $\arctan(x-1) - \arctan\frac{2013}{x} = \frac{\pi}{4}$