التمرين الأول :

أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty} E(x)\sin\left(\frac{E(x)}{x^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4+x^2}\cos x}{x^2}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}\right)$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[4]{x^2-\sqrt{x}}}-\frac{x}{\sqrt[4]{x^2+\sqrt{x}}}$

التمرين الثاني :

1) بين أن $x=\tan^2\alpha$ $\left(\exists!\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$ $(\forall x\geq0)$

2) استنتج أن :

$$(\forall x\geq0)\quad \arctan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$\arctan x-2\arctan\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

التمرين الثالث :

1) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

$$\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) : \sin x\leq x \text{ و } x\leq\tan x$$

2) بين أن $\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) : 0\leq\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\leq\frac{1-\cos x}{\sin x}$

3) أستنتج $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$

التمرين الرابع :

لتكن f دالة متصلة على المجال $]a,b[$ و بحيث : $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=-\infty$ و $\lim_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)=+\infty$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي :

$$\begin{cases}g(x)=\arctan(f(x)) \;;\; x\in\,]a,b[\\ g(a)=-\frac{\pi}{2} \;;\; g(b)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

أ) أدرس اتصال الدالة g المعرفة على $[a,b]$

ب) استنتج أن : $f(c)=0$ $(\exists c\in\,]a,b[)$

التمرين الخامس :

لتكن f دالة عددية معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و f' متصلة و بحيث :

$$\begin{cases}f(0)=0 \;;\; f'_d(0)=0\\ (\exists a\in\mathbb{R}^{+*}) \;:\; f(a)<0 \;;\; f'(a)>0\end{cases}$$

1) بين أن : $f(b)=0$ / $(\exists b\in\,]0,a[)$

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$g(0)=0 \text{ و } g(x)=\frac{f(x)}{x} \;;\; x>0$$

أ- بين أن g متصلة على $\mathbb{R}^+$

ب- بين أن g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

3) استنتج أن $\frac{f(c)}{c}=f'(c)$ / $(\exists c\in\,]0,b[)$

التمرين السادس :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f(x)=\sin x$

1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

2) ليكن التقابل العكسي للدالة f . بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ و أن $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $[-1,1]$ بما يلي : $\varphi(x)=f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

أ- بين أن f^{-1} فردية ثم أدرس زوجية الدالة φ

ب- أدرس قابلة اشتقاق الدالة φ على المجال $]-1,1[$ وأحسب المشتقة $\varphi'(x)$

ج- استنتج أن : $\varphi(x)=2f^{-1}(x)$ $\left(\forall x\in\left[-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right]\right)$