

التمرين الثاني

نعتبر الدالة $f(x) = x \sqrt{\left(E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 - E\left(\frac{1}{x}\right)}$

(1) أ. بين أن :

$$\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \sqrt{(1-x)(1-2x)} \leq f(x) \leq \sqrt{1-x}$$

بد استنتج $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

(2) هل الدالة f تقبل نهاية في النقطة $x_0 = 0$

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} - \sqrt[3]{\frac{x^5+1}{x^2-2x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}{1 - \sqrt{2 - \sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(E(x^2))}{x^2}$$

بين أن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a} \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}} = -\frac{2}{3} \sqrt[12]{a^7}$ (حيث $a > 0$)

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

بمايلي : $f(x) = \sin x$

(1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

وليكن f^{-1} تقابله العكسي

(2) بين أن :

$$\left(\forall x \in \right]-1, 1[\left) f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

التمرين الثالث

ليكن α ; β عددان من \mathbb{Q}^{+*} و بحيث $\alpha + \beta = 1$

(1) نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $[0, 1]$

بمايلي : $\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x - \beta$

أ. أدرس منحى تغيرات الدالة

بد أنجز جدول تغيرات الدالة φ واستنتج أن :

$$\left(\forall x \in [0, 1]\right) x^\alpha \leq \alpha x + \beta$$

(2) بين أن $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$ $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*2})$

تطبيق : بين أن لكل عددين a, b من \mathbb{R}^{+*} لدينا :

$$\sqrt[5]{a^2 b^3} \leq \frac{2a + 3b}{5}$$

التمرين الخامس

(I) لتكن U, V دالتين متصلتين وقابلتين على \mathbb{R}^+ و بحيث $U(0) = V(0) = 0$ و $V(x) \neq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$

و $V'(x) \neq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$. ليكن x من \mathbb{R}^{+*} ونضع $\varphi(t) = U(t)V(x) - U(x)V(t)$.

بتطبيق مبرهنة رول بين أن : $(\exists c \in]0, x[) \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{U'(c)}{V'(c)}$ (*)

(II) 1) باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية بين أن $y < \tan y$ $\left(\forall y \in \right]0, \frac{\pi}{2}\left[\right)$

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $\left]0, \frac{\pi}{2}\left[$ بمايلي : $f(t) = \frac{\sin t}{t}$; $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\left[$ و $f(0) = 1$

أ. أدرس اتصال الدالة f على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\left[$

بد بين أن f تناقصية قطعاً على $\left]0, \frac{\pi}{2}\left[$

(3) ليكن x من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\left[$. باستعمال العلاقة (*) ورتابة الدالة f بين أن : $\frac{\sin x}{6x} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$

و استنتج $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sin x}{x^3}$