المدة : 2h — فرض محروس — الثانية علوم رياضية

مسألة

A 1- باستعمال T.A.F بين أن

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2- أحسب بدلالة x التكاملين،

$$I(x) = \int_1^x \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt \quad , \quad J(x) = \int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t}\,dt$$

بحيث $x > 1$

B نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & , x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- بين أن f متصلة في النقطة $x_0 = 0$

2- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

أ- بين أن : $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$ لكل $x > 0$

ب- بين أن : F دالة زوجية

3- نضع $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{F(x)}{x^2} & , x \neq 0 \\ \varphi(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

أ- بين أن φ قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 — 1,5

ب- بين أن φ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ — 1,5

وأن : $\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \dfrac{\ln(1+x^2) - 2F(x)}{x^3}$

ج- استنتج تغيرات φ على $\mathbb{R}$ — 1

4- أحسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ — 1

تمرين 1

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} / \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

1- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي — 1,5

2- حدد أساسا لـ E واستنتج بعده — 1,5

3- بين أن : — 1,5

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 6 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

أساس آخر للفضاء $(E,+,\cdot)$

تمرين 2

$$E = \{ f(x) = (ax^2 + bx)e^x \ / \ a,b \in \mathbb{R}^2 \}$$

1) بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي — 1,5

2) حدد بعد E — 1,5