

تصحیح الفرض المحروس رقم ① الثاني للإستاذ

← جدول تغيرات الدالة f_n

x	0 $+\infty$
$f_n(x)$	0 $+\infty$

$t \in [0; +\infty[\quad g(t) = e^{-t} - (1-t)$ ③

أ- لندرس تغيرات الدالة g :
 $g'(t) = 1 - e^{-t}$ لكل $t \in [0; +\infty[$
 $-t < 0 \Rightarrow e^{-t} < 1$
 $\Rightarrow 1 - e^{-t} > 0$
 $\Rightarrow g'(t) > 0$
 ومنه: g تزايدية قطعاً على $[0; +\infty[$

t	0 $+\infty$
$g(t)$	0 $+\infty$

لدينا: $(\forall t \in [0; +\infty[) \quad g(t) > g(0) = 0$
 ومنه: $e^{-t} - 1 + t > 0$
 أي: $1 - e^{-t} < t$
 ولدينا: $g'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t} > 0$
 وعليه: $\forall t \in [0; +\infty[\quad 0 < 1 - e^{-t} < t$

ب- لنبين أن: $0 < e^{-x} - (1-x) < \frac{x^2}{2}$ ($x > 0$)
 لدينا حسب السؤال السابق:
 $\forall t > 0) \quad 0 < 1 - e^{-t} < t$
 وعليه: $0 < \int_0^x (1 - e^{-t}) dt < \int_0^x t dt$
 أي: $0 < [t + e^{-t}]_0^x < [\frac{t^2}{2}]_0^x$

ومنه: $0 < x + e^{-x} - 1 < \frac{x^2}{2}$

إذن: $\forall x > 0) \quad 0 < e^{-x} - (1-x) < \frac{x^2}{2}$

الجزء (1)

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$f_n(0) = 0$ و $f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}}$ $x \neq 0$

① - لنبين أن f_n متصله على اليمين في $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{nx}}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{nx}} = 0 = f_n(0)$

إذن f_n متصله في 0 على اليمين
 ب- لندرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0.
 ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$

$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 0$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f_n'(0) = 0$

② - أ-

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{nx}}$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{nx} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{nx}} = e^0 = 1$
 لأن $x \rightarrow e^x$ متصله في 0

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

ب- لنحسب المشتقة $f_n'(x)$

لدينا: ليكن $x \in]0; +\infty[$
 $f_n'(x) = e^{-\frac{1}{nx}} + x \left(\frac{1}{nx^2}\right) e^{-\frac{1}{nx}}$

ومنه: $f_n'(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right) e^{-\frac{1}{nx}}$

لدينا: $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad f_n'(x) > 0$

وعليه: f_n تزايدية قطعاً على $[0; +\infty[$

⑥- لنبين أن المنحنى (C_2) هو صورة (C_1)

بالتحريك $H(0, \frac{1}{n})$.
 نعتبر $M(x, y)$ نقطة من (C_2) و $M'(x', y')$ صورتها بالتحريك $H(0, \frac{1}{n})$
 لنبين أن $M'(x', y')$ تنتمي للمنحنى (C_1)

$$\left(\begin{array}{l} M \text{ صورة } M' \\ \text{بالتحريك} \\ H(0, \frac{1}{n}) \end{array} \right) \Leftrightarrow \vec{OM}' = \frac{1}{n} \vec{OM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{n} x \\ y' = \frac{1}{n} y \end{cases}$$

لدينا: $M(x, y) \in (C_2)$ وعليه $y = x e^{-\frac{1}{nx}}$
 $x = n x' \Rightarrow y = n x' e^{-\frac{1}{n x'}}$

ومنه $y' = \frac{1}{n} y \Rightarrow y' = \frac{1}{n} (n x' e^{-\frac{1}{n x'}})$

أي $y' = x' e^{-\frac{1}{n x'}}$

وعليه $M'(x', y') \in (C_1)$

إذن: (C_1) هو صورة (C_2) بالتحريك $H(0, \frac{1}{n})$

الجزء (2)

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

①- لنبين أن: $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \leq x$

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad \frac{1}{nx} \leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1$$

$$\Rightarrow x e^{-\frac{1}{nx}} \leq x$$

وعليه: $(\forall x \in [0, 1]) \quad f_n(x) \leq x$

②- لنستنتج أن $I_n < \frac{1}{2}$

لدينا: $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \leq x$

ومنه: $\int_0^1 f_n(x) dx < \int_0^1 x dx$

أي: $I_n < \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$

وعليه: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n < \frac{1}{2}$

③- لنبين أن: $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < I_n$

لدينا (ص 4): $(\forall x > 0) \quad f_n(x) > x - \frac{1}{n}$

ومنه: $\int_0^1 f_n(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{n} \right]_0^1$

إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

④- أ- لنبين أن: $(\forall x > 0) \quad 0 < f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2n^2x}$

لدينا حسب السؤال السابق:

$$(\forall x > 0) \quad 0 < e^{-x} - (1-x) < \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall x > 0) \quad \frac{1}{nx} \in \mathbb{R}^+$$

لنعوض ب $\frac{1}{nx}$ في العلاقة (1):

$$0 < e^{-\frac{1}{nx}} - (1 - \frac{1}{nx}) < \frac{1}{2n^2x^2}$$

بما أن $x > 0$ فإن:

$$0 < x e^{-\frac{1}{nx}} - (x - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2n^2x}$$

ومنه: $(\forall x > 0) \quad 0 < f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2n^2x}$

ب- لندرس الفرع اللانهائي (C_1) عند $+\infty$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) = 0$

إذن المستقيم $y = x - \frac{1}{n}$ مقارب

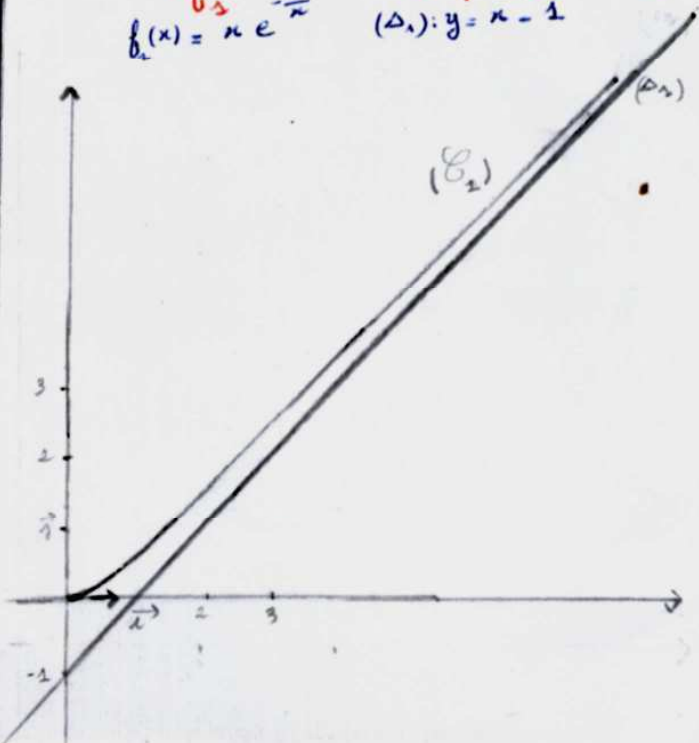
مائل للمنحنى (C_1) بجوار $+\infty$

ج- لندرس الوضع النسبي لـ (C_1) والمقارب المائل

بما أن: $(\forall x > 0) \quad f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) > 0$

فإن: (C_1) يوجد فوق (Δ_n)

⑤- لنرسم (C_1) للدالة $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$



ب- لنبين أن المتتالية (α_n) تناقصية ونستنتج أنها متقاربة.

لدينا : $\alpha_n \ln \alpha_n = h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$

$\alpha_{n+2} \ln \alpha_{n+2} = h(\alpha_{n+2}) = \frac{1}{n+2}$

لدينا : $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(\alpha_{n+2}) < h(\alpha_n)$
 h متزايدة قطعا على $]1; +\infty[$

وعليه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_{n+2} < \alpha_n$

وبالتالي : (α_n) تناقصية.

← (α_n) تناقصية ومحدودة بالعدد 1 إذن (α_n) متقاربة

④ - نضع : $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

أ- لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) \alpha_n > 1$

وهو : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n > 1$

وعليه : $\alpha > 1$

← لنبين أن $h(\alpha) = 0$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(\alpha)$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \ln \alpha_n = \alpha \ln \alpha$

بما أن : $\alpha \ln \alpha = h(\alpha)$ و $\alpha_n \ln \alpha_n = \frac{1}{n}$

فإن : $h(\alpha) = 0$

ب- لنستنتج قيمة النهاية α .
 لدينا : $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha = 0$

$\Leftrightarrow \ln \alpha = 0$ ($\alpha > 1$)

وعليه : $\alpha = 1$

$\alpha = 1$

الجزء (4)

$F(0) = 0$ و $F(x) = \int_x^{2x} f_n(t) dt$; $x \neq 0$

① - لنبين أن : $0 < e^{-\frac{1}{x}} < 1$ ($\forall t > 0$)

لدينا : $0 < e^{-\frac{1}{x}} < 1$ ($\forall t > 0$)

ب- لنبين أن : F متصلة على \mathbb{R} جميع $x_0 = 0$

← لنحدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

لدينا : ③ و ⑤

$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < I_n < \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

وعليه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}$

الجزء (3)

① - أ- لنبين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α .

f متصلة وتزايدية قطعا على $]0; +\infty[$

وهو : f تقابل من $]0; +\infty[$ نحو $]0; +\infty[$

إذن : $1 \in]0; +\infty[$ و $\alpha_n \in]0; +\infty[/ f(\alpha_n) = 1$

وعليه : المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α

ب- لنبين أن : $\alpha > 1$

لدينا : $f_n(1) = e^{-\frac{1}{n}}$

أي : $e^{-\frac{1}{n}} < 1$

و $f_n(1) < f_n(\alpha_n)$ و f_n تزايدية قطعا على $]0; +\infty[$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n > 1$

② - لنتحقق أن $\alpha_n \ln \alpha_n = \frac{1}{n}$

$f_n(\alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \alpha_n e^{-\frac{1}{\alpha_n}} = 1$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{\alpha_n}$ ($\alpha_n > 1$)

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha_n} = \ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha_n \ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) = -\frac{1}{n}$

وهو : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n \ln \alpha_n = \frac{1}{n}$

③ - أ- لندرس تغيرات الدالة $h(x) = x \ln x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{+*}

$h'(x) = \ln x + 1$ ($\forall x \in]0; +\infty[$)

$h'(x) > 0 \Rightarrow \ln x > -1$
 $\Rightarrow x > e^{-1} = \frac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
$h(x)$	0		$+\infty$

لحساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ←

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3}{2}x - 1 \right)$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

ج - لندرس الفرع اللانهائي الكسبي (Γ_f) عند $+\infty$ لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

د $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x - 1 = +\infty$
وعليه : (Γ_f) يقبل فرعاً شاملاً باتجاه محور

الإجابة

4. أ - لنبين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ وأن $F'(x) = (4e^{\frac{1}{2}x} - 1)f_2(x)$ لدينا :

$t \mapsto f_2(t)$ متصلة على $]0; +\infty[$ وعليه f_2 تقبل دالة أصلية G على $]0; +\infty[$ أي :

$F(x) = G(2x) - G(x)$ لدينا : $2x \mapsto x^4$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

د $G(x) \mapsto x^4$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ وعليه : $]0; +\infty[\subset]0; +\infty[$

F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ $G(2x) - G(x)$ $(\forall x \in]0; +\infty[)$

$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$
 $= 2f_2(2x) - f_2(x)$
 $= 2(2x e^{-\frac{1}{2} \cdot 2x} - f_2(x))$
 $= f_2(x) (4e^{\frac{1}{2}x} - 1)$

وهذه : $(\forall x \in]0; +\infty[) F'(x) = (4e^{\frac{1}{2}x} - 1)f_2(x)$

ب - لندرس تغيرات الدالة F ونخرج جدول تغيراتها.

لدينا : $F'(x) = (4e^{\frac{1}{2}x} - 1)f_2(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^{**})$

لدينا : $f_2(x) > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^{**})$

د $\frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} > 1$
 $\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2}x} > 4$
 $\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2}x} - 1 > 3 > 0$

أ ب - لدينا : $(\forall t > 0) 0 < e^{-\frac{1}{2}t} < 1 \Rightarrow 0 < t e^{-\frac{1}{2}t} < t$ $(t > 0)$

$\Rightarrow 0 < f_2(t) < t$
 $\Rightarrow 0 < \int_x^{2x} f_2(t) dt < \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^{2x}$

وهذه : $0 < F(x) < 2x^2 - \frac{x^2}{2}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 - \frac{x^2}{2} = 0 = F(0)$

وهذه : F متصلة على اليمين في $x_0 = 0$

د - لنبين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$ لدينا حسب السؤال السابق :

$(\forall x > 0) 0 < \frac{F(x)}{x} < 2x - \frac{x}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{2} = 0$ وعليه :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$

إذن F قابلة للاشتقاق في 0 وعليه : (Γ_f) يقبل نصف مماس عند $x_0 = 0$ ومعادلته :

3. أ - لنبين أن : $e^t > t + 1$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ $y = 0$ (محور لافاق هيل)

نضع : $t \in \mathbb{R}$ $g(t) = e^t - t - 1$

$g'(t) = e^t - 1$
 $g'(t) > 0 \Rightarrow e^t > 1$
 $\Rightarrow t > 0$ وهذه :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
g(t)	$+\infty$	0	$+\infty$

لدينا : $(\forall t \in \mathbb{R}) g(t) \geq g(0) = 0$ وهذه :

$(\forall t \in \mathbb{R}) e^t \geq t + 1$

ب - لنبين أن :

$(\forall x > 0) F(x) \geq -x + \frac{3}{2}x^2$

لدينا : حسب السؤال السابق :

$e^{-\frac{1}{2}t} \geq -\frac{1}{t} + 1$ $(t > 0)$ وهذه :

$t e^{-\frac{1}{2}t} \geq t - 1$ وهذه :

$\int_x^{2x} f_2(t) dt \geq \int_x^{2x} (t-1) dt$ وعليه :

$F(x) \geq \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_x^{2x}$ وهذه :

$(\forall x > 0) F(x) \geq -x + \frac{3}{2}x^2$

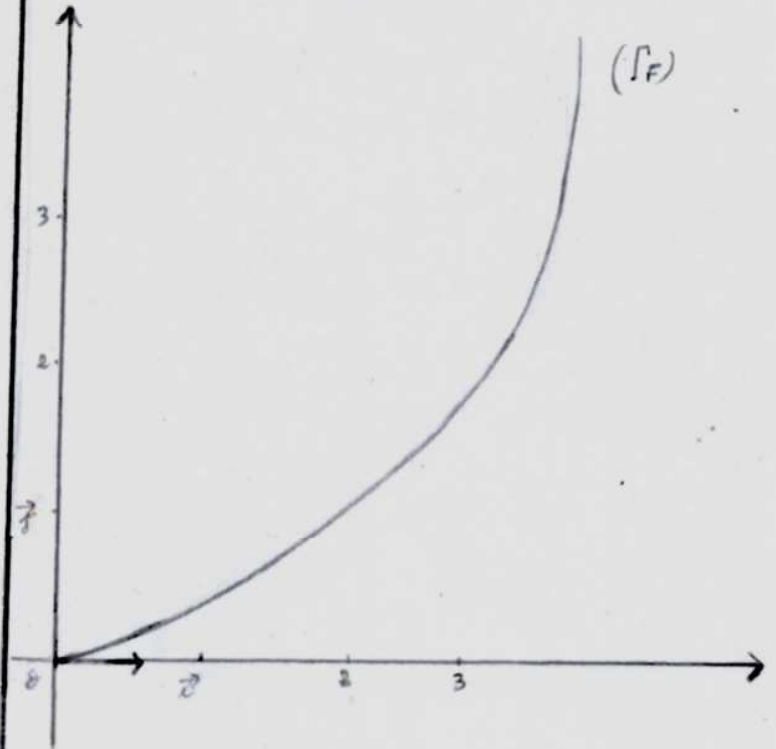
٤- ب - وسنه: $F'(n) > 0$ ($\forall n \in \mathbb{R}^*$)

لذن: F تزايدية وطاق على $[0; +\infty[$

جدول تغيرات F

x	0	$+\infty$
$F(x)$	0	$+\infty$

٥- رسم المنحنى (Γ_F)



هنا انجاز التامية: أعينة سامي
لحت اشرف الامتاد: المانتى بوتغيب