الجزء (1)   ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f_n(0)=0 \quad \text{و} \quad f_n(x)=xe^{-\frac{1}{nx}} \quad ; \quad x\neq 0$$

1) أ- بين أن f_n متصلة على يمين النقطة $x_0=0$ (0.5 ن)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين النقطة $x_0=0$ (0.5 ن)

2) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ (0.5 ن)

ب- أحسب المشتقة $f_n'(x)$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها (1ن)

3) نضع $g(t)=e^{-t}-(1-t)$ لكل t من المجال $[0,+\infty[$

أ- أدرس تغيرات الدالة g و استنتج أن $(\forall t\in[0,+\infty[)\quad 0\leq 1-e^{-t}\leq t$ (1 ن)

ب- بين أن $(\forall x\geq 0)\quad 0\leq e^{-x}-(1-x)\leq \dfrac{x^2}{2}$ (0.5 ن)

4) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (\forall x>0)\quad 0\leq f_n(x)-\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\leq \dfrac{1}{2n^2x}$ (0.5 ن)

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$ (0.5 ن)

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و المقارب المائل (0.5 ن)

5) أرسم المنحنى (C_1) للدالة f_1 (0.75 ن)

6) بين أن المنحنى (C_n) هو صورة المنحنى (C_1) بالتحاكي $H\left(O,\dfrac{1}{n}\right)$ (0.5 ن)

الجزء (2) نضع $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $(\forall x\in[0,1])\quad f_n(x)\leq x$ (0.5 ن)

2) استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad I_n\leq\dfrac{1}{2}$ (0.5 ن)

3) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\leq I_n$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ (0.75 ن)

الجزء (3)

1) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا a_n (0.5 ن)

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad a_n>1$ (0.5 ن)

2) تحقق أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad a_n\ln a_n=\dfrac{1}{n}$ (0.5 ن)

3) أ- أدرس تغيرات الدالة $h(x)=x\ln x$ (0.5 ن)

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة (0.75 ن)

4) نضع $a=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

أ- بين أن $a\geq 1$ و أن $h(a)=0$ (0.75 ن)

ب- استنتج قيمة النهاية a (0.25 ن)

الجزء (4)

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(0)=0 \quad \text{و} \quad F(x)=\int_x^{2x} f_1(t)\,dt \quad ; \quad x\neq 0$$

1) أ- بين أن $(\forall t>0)\quad 0<e^{-\frac{1}{t}}<1$ (0.5 ن)

ب- بين أن F متصلة على يمين $x_0=0$ (0.5 ن)

2) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{F(x)}{x}=0$ و أول النتيجة هندسيا (0.75 ن)

3) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R})\quad e^t\geq t+1$ (0.5 ن)

ب- بين أن $(\forall x>0)\quad F(x)\geq -x+\dfrac{3}{2}x^2$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ (0.75 ن)

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$ (0.5 ن)

4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن :

$$F'(x)=\left(4e^{\frac{1}{2x}}-1\right)f_1(x) \quad (1 \text{ ن})$$

ب- أدرس تغيرات الدالة F و أنجز جدول التغيرات (0.75 ن)

5) أرسم المنحنى (Γ_F) (1 ن)