

**Durée : 03h**• التمرين الأول: (نقطتان)

لمزيد من دروس التمارين الامتحانات . . . موقع قلبي

تتكون  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المتتالية المعرفة كما يلي:  $S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \dots + \frac{3n-2}{5^n}$ 

$$(1) - \text{بين أن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*); S_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{S_n}{5} + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$$

$$(2) - \text{بين بالترجع أن المتتالية } (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ مكبورة بالعدد } \frac{1}{2}$$

$$(3) - \text{استنتج أن المتتالية } (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ متقاربة و حدد نهايتها .}$$

• التمرين الثاني: (04 نقط)I- تتكون  $(a_n)_{n \geq 2}$  و  $(b_n)_{n \geq 2}$  المتتاليتين المعرفتين كما يلي:

$$b_n = a_n \times \cos \frac{\pi}{2^n} \text{ و } a_n = \cos \frac{\pi}{2^2} \times \cos \frac{\pi}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{\pi}{2^n}$$

$$(1) - \text{بين أن المتتالية } (a_n)_{n \geq 2} \text{ محدودة ورتيبة .}$$

$$(2) - \text{بين أن: } (\forall x \in \mathbb{R}); \cos^2 x - \cos(2x) \geq 0$$

$$(3) - \text{بين أن المتتالية } (b_n)_{n \geq 2} \text{ تزايدية .}$$

$$(4) - \text{بين أن المتتاليتين } (a_n)_{n \geq 2} \text{ و } (b_n)_{n \geq 2} \text{ متحاديتان . ماذا تستنتج؟}$$

$$\text{II- مهما يكن } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ بحيث } n \geq 2 \text{، نضع: } c_n = a_n \times \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$(1) - \text{بين أن } (c_n)_{n \geq 2} \text{ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول .}$$

$$(2) - \text{استنتج النهاية المشتركة L للمتتاليتين } (a_n)_{n \geq 2} \text{ و } (b_n)_{n \geq 2}$$

$$(3) - \text{بين أن : } |\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) .$$

$$(4) - \text{إستنتج أنه لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ حيث } n \geq 2 \text{ ، لدينا : } 0 \leq a_n - L \leq \frac{\pi^2}{2^{2n+1}} .$$

• التمرين الثالث:

$$I - \text{تكن } f \text{ الدالة المعرفة على المجال } [0;1] \text{ كما يلي : } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$$

و ليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و ممنظم ( حيث الوحدة هي 4cm ) .

$$(1) - \text{بين أن } (C_f) \text{ متماثل بالنسبة للنقطة } \Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) .$$

(2) - أدرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

(3) - بين أن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $[0;1]$  ، ثم ضع جدول التغيرات .

(4) - أدرس إشارة  $f(x) - x$  على المجال  $[0;1]$  ، ثم أنشئ المنحنى  $(C_f)$  .

II - تكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المتتالية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(1) - تحقق من أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  معرفة بالفعل .

(2) - بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تكون ثابتة إذا و فقط إذا كان :  $u_0 \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$  .

(3) - نفترض أن :  $u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$  .

أدرس رقابة المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

(4) - نفترض أن :  $u_0 \in \left] \frac{1}{2}; 1\right[$  .

بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و حدد نهايتها .

• التمرين الرابع: (03 نقط)

I- نعتبر الدالة :  $f : x \mapsto \frac{x^4 + 5x^3 + 1}{x^4 + 1}$

(1)- أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2)- لتكن  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  كما يلي :

$$\begin{cases} g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ (\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[); g(x) = f(\tan x) \end{cases}$$

أ- بين أن الدالة  $g$  تحقق شروط مبرهنة رول على المجال  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

ب- بين أنه :  $(\exists c \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) / g'(c) = 0$

ج- استنتج أنه :  $(\exists \alpha \in \mathbb{R}) / f'(\alpha) = 0$

II- لتكن  $h$  دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  بحيث :

$h$  تقبل عند  $+\infty$  و  $-\infty$  نهايتين منتهيتين و متساويتان (  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) < \infty$  )

بين أن المعادلة  $(E) : h'(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في  $\mathbb{R}$ .

• التمرين الخامس: (06 نقط)

I- لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  كما يلي :  $f(x) = x + \text{Arc tan}(\sqrt{x})$

و ليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1)- أحسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2)- أدرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

(3)- بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^{+*}$  و أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

(4)- استنتج رقابة  $f$  ، ثم ضع جدول تغيراتها .

(5)- بين أن المشتقة  $f'$  تناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}^{+*}$ .

(6)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_f)$ ، ثم أنشئ  $(C_f)$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(7)- بين أن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  معرفة على مجال  $I$  ينبغي تحديده.

(8)- أنشئ المنحنى  $(C_{f^{-1}})$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

II- نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a / a \in \mathbb{R}^{+*} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

(1)- بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$ .

(2)- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصية قطعاً.

(3)- باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية، أثبت أنه :  $(\exists k \in ]0; 1[) / (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq k u_n$ .

(4)- استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و حد نهايتها.

• ملحوظة: تخصص نقطتان إضافيتان لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة.