

Durée : 04h

■ التمرين رقم 01: (03pts)

(1)- ليكن θ عنصرا معلوما من المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

و لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$. (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \sin \theta + \sin^2 \theta + \dots + \sin^n \theta$$

بين أن للمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ نهاية منتهية q ينبغي تحديدها بدلالة θ .

(2)- لكل n من \mathbb{N}^* ، نضع : $v_n = q + q^2 + \dots + q^n$.

عبر عن v_n بدلالة n و θ ، ثم أدرس حسب قيم θ نهاية المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

■ التمرين رقم 02: (04pts)

ليكن n من \mathbb{N} بحيث $n \geq 2$.

و لتكن f_n الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_n(x) = x - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$.

(1)- بين أن الدالة f_n تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .

(2)- إستنتج أن المعادلة : $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في \mathbb{R} و أن $0 < \alpha_n < 1$.

(3)- بين أن : $(\forall x \in]0; 1[); f_{n+1}(x) < f_n(x)$ ، ثم أدرس رقابة المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$.

(4)- أثبت أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متقاربة و حدد نهايتها.

■ التمرين رقم 03: (05pts)

(1)- بين أن : $(\forall t \in]0; 1[); \frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t$.

(2)- إستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(3)- ليكن n من \mathbb{N}^* و ليكن a و b من \mathbb{R}^{*+} بحيث $a < b$.

• باستعمال مبرهنة التزايد المتتالية ، بين أن : $(n+1)a^n < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.

(4)- أثبت أن المتتاليتين $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متحاديتان و حدد نهايتهما.

■ التمرين رقم 04: (06pts)

← الجزء الأول: (04pts)

تتكن f الدالة المعرفة على $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right); f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{\tan x}) \text{ و } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- (1)- بين أن الدالة f متصلة على المجال I .
- (2)- أ- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر.
ب- بين أن f تزايدية قطعاً على I ، ثم ضع جدول تغيراتها.
- (3)- بين أن المنحنى (C_f) متماثل بالنسبة للنقطة $\Omega\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.
- (4)- حل في I المعادلة: $(E): f(x) = x$ ، ثم أدرس إشارة $f(x) - x$.
- (5)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (حيث الوحدة هي 2cm).

← الجزء الثاني: (02pts)

تتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 \in I$$

- (1)- حدد شرطاً كافياً و لازماً لكي تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.
- (2)- نفترض أن: $u_0 \notin \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$ ، بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها.

■ التمرين رقم 05: (12pts)

← الجزء الأول: (04pts)

تتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x \text{ و } f(0) = 0$$

- (1)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
- (2)- أدرس إتصال و قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر.
- (3)- بين أن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^+ و أن: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$).
- (4)- ضع جدول تغيرات الدالة f .
- (5)- بين أن: $f''(x) = \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$)، ثم أدرس تقعر المنحنى (C_f) و حدد نقطة إنعطافه.
- (6)- أرسم المنحنى (C_f) بالدقة اللازمة في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (وحدة القياس هي 3cm).

← الجزء الثاني: (05pts)

ليكن n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

و لتكن f_n الدالة المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$. (\forall x \in]0; +\infty[); f_n(x) = \sqrt{x} \cdot (\ln x)^n \text{ و } f_n(0) = 0$$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، (حيث وحدة القياس هي $3cm$).

(1) - أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$.

(2) - أدرس إتصال و قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في الصفر .

(3) - بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و أن :

$$. (\forall x \in]0; +\infty[); f'_n(x) = \frac{(\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)}{2\sqrt{x}}$$

(4) - ضع جدول تغيرات الدالة f_n (ناقش تبعا لزوجية n حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$).

(5) - أدرس إشارة كل من $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ و $f_{n+2}(x) - f_n(x)$ على $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج النقط

المشتركة و الوضع النسبي للمنحنيات (C_n) و (C_{n+1}) و (C_{n+2}) .

(6) - أرسم في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) المنحنيين (C_2) و (C_3) .

← الجزء الثالث: (03pts)

(1) - ليكن a عددا معلوما من المجال $[1; +\infty[$.

• حدد تبعا لقيم a نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = f_n(a)$.

(2) - ليكن n من \mathbb{N}^* .

• بين أن المعادلة : $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $[1; +\infty[$ و أن $1 < \alpha_n < e$.

(3) - بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ رتيبة قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

(4) - أحسب نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

إنتهى الموضوع .

يؤخذ بعين الاعتبار حسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

Barème (./30)