تصحيح الفرض المحروس رقم ②

الأسدس II

التمرين I :

$(E) : m^2 Z^2 + m^3 Z + 1 - i m^2 = 0$

① أ- من أجل $m = -1$

$(E) : z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$

$\Delta = (2i+1)^2$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \dfrac{1 - (2i+1)}{2} = -i$

$z_2 = \dfrac{1 + (2i+1)}{2} = 1 + i$

ومنه: $S = \{-i, 1+i\}$

ب- لنحدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1+i$ حلا للمعادلة (E)

$\left(u = 1+i \text{ حل للمعادلة } (E)\right) \Leftrightarrow (E') : (1+i)m^3 + i m^2 + 1 = 0$

لدينا: $m = -1$ حل للمعادلة (E')

ومنه: $(E') \Leftrightarrow (m+1)\left((1+i)m^2 - m + 1\right) = 0$

لنحل المعادلة: $(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (2i-1)^2$

ومنه: $m = \dfrac{1 - (2i-1)}{2(1+i)} = -i$

$m = \dfrac{1 + (2i-1)}{2(1+i)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i$

وعليه قيم m التي من أجلها $u = 1+i$ حل للمعادلة (E) هي:

$m \in \left\{-1, -i, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i\right\}$

في حالة $m = -1$ ((u و u' حلا المعادلة (E)))

$u = 1 + i$ و $u' = -i$

في حالة $m = -i$

$(E) \Leftrightarrow -z^2 + iz + 1 + i = 0$

$u_2 = i - u_1 = -1$

ومنه:

$u = 1 + i$ و $u' = -1$

في حالة $m = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i$

$(E) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} i Z^2 + \dfrac{1}{4}(1+i) Z + \dfrac{3}{2} = 0$

$u' = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - 1 - i = -\dfrac{3}{4}(i+1)$

وعليه:

$u = 1 + i$ و $u' = -\dfrac{3}{4}(i+1)$

② أ- لنتحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب على الشكل:

$\Delta = m^2 (m^2 + 2i)^2$

$\Delta = m^6 - 4(1 - i m^2) m^2$

$\Delta = m^2 (m^4 - 4 + 4i m^2)$

ومنه: $\Delta = m^2 (m^2 + 2i)^2$

ب- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \dfrac{-m^3 - m(m^2 + 2i)}{2m^2} = -m - \dfrac{i}{m}$

$z_2 = \dfrac{-m^3 + m(m^2 + 2i)}{2m^2} = \dfrac{i}{m}$

③ أ-

$Z = \dfrac{m - a}{m - b} = \dfrac{m + m + \frac{i}{m}}{m - \frac{i}{m}} = \dfrac{2m^2 + i}{m^2 - i}$

$= \dfrac{2(m^2 - i) + 3i}{m^2 - i} = 2 + \dfrac{3i}{m^2 - i}$

$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow 2 + \dfrac{3i}{m^2 - i} = 2 - \dfrac{3i}{\bar{m}^2 + i}$

$\Leftrightarrow \bar{m}^2 = -m^2$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(m^2) = 0$

ومنه: $m^2 \in i\mathbb{R}$

إذن: $\arg(m^2) = \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$ أو $\arg(m^2) = -\dfrac{\pi}{2} [2\pi]$

$2\arg(m) = \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$ أو $2\arg(m) = -\dfrac{\pi}{2} [2\pi]$

وعليه:

$\arg(m) = \dfrac{\pi}{4} [\pi]$ أو $\arg(m) = -\dfrac{\pi}{4} [\pi]$

ب-

(A و B و M نقط مستقيمية) $\Leftrightarrow \dfrac{m - a}{m - b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(m) \equiv \dfrac{\pi}{4} [\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\dfrac{\pi}{4} [\pi]$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(m) = \mathrm{Im}(m)$ أو $\mathrm{Re}(m) = -\mathrm{Im}(m)$

نضع (P) $m = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$
ومنه: مجموعة النقط $M(m)$ التي تكون من أجلها A و B و M نقط مستقيمية هي اتحاد المستقيمين:
$(D_1): y = x$
$(D_2): y = -x$.

4) أ- لدينا R دوران مركزه $B(\frac{i}{m})$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$A' = R(A) \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \frac{i}{m}) + \frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow a' = ai + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow a' = -im + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow \boxed{a' = -im + \frac{i}{m} + \frac{2}{m}}$

$B' = R^{-1}(M) \Leftrightarrow R(B') = M$

$\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}(b' - \frac{i}{m}) + \frac{i}{m} = m$

$\Leftrightarrow b' - \frac{i}{m} = -im - \frac{1}{m}$

$\Leftrightarrow \boxed{b' = -im + \frac{i-1}{m}}$

ب- $M' = R(M) \Leftrightarrow m' - \frac{i}{m} = e^{i\frac{\pi}{2}}(m - \frac{i}{m})$

$\Leftrightarrow m' = mi + \frac{i+1}{m}$

لدينا: $\frac{b'+m'}{2} = \frac{-mi + \frac{i-1}{m} + mi + \frac{i+1}{m}}{2}$

$= \frac{2i}{2m} = \frac{i}{m}$

$= b$

وعليه: $B(b)$ هي منتصف القطعة $[B'M']$

ج- لتكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لحقها

$Z_I = \frac{m+a}{2} = \frac{-i}{2m}$

$\frac{b'-a'}{b-z_I} = \frac{-im + \frac{i-1}{m} + im - \frac{i}{m} - \frac{2}{m}}{\frac{i}{m} + \frac{i}{2m}}$

$= \frac{-3}{m} \times \frac{2m}{3i}$

$= 2i$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \arg(\frac{b'-a'}{b-Z_I}) \; [2\pi]$

$\equiv \arg(2i) \; [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$

$(IB) \perp (A'B')$

ولدينا: $\left|\frac{b'-a'}{b-Z_I}\right| = |2i| = 2$

ومنه: $|b'-a'| = 2|b-Z_I|$

أي: $\boxed{A'B' = 2BI}$

التمرين II:

① أ- إذا كان n زوجي

$(\exists h \in \mathbb{Z}) / n = 2h \Rightarrow n^4 = 16h^4$

إذن: (1) $\quad n^4 \equiv 0 \; [16]$

إذا كان n فردي

$(\exists h' \in \mathbb{Z}) / n = 2h' + 1 \Rightarrow n^4 = (2h+1)^2 (2h+1)^2$

$\Rightarrow n^4 = (4h^2 + 1 + 4h)^2$

$\Rightarrow n^4 = 16h^4 + 8h^2(1 + 4h) + (1 + 4h)^2$

$\Rightarrow n^4 = 16h^4 + 8h^2 + 32h^3 + 1 + 16h^2 + 8h$

$\Rightarrow n^4 = 16(h^4 + h^2 + 2h^3) + 8h(h+1) + 1$

لدينا:
$\begin{cases} 16(h^4 + h^2 + 2h^3) \equiv 0 \; [16] \\ 8h(h+1) \equiv 0 \; [16] \end{cases}$
(جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي $h(h+1) = 2q \; (\exists q \in \mathbb{Z})$)

إذن: (2) $\quad n^4 \equiv 1 \; [16]$

من (1) و (2) نستنتج أن:
$n^4 \equiv 0 \; [16]$ أو $n^4 \equiv 1 \; [16]$

②

$N = a^4 + b^4 \qquad a \wedge b = 1$

الحالة (1):
$\begin{cases} a^4 \equiv 1 \; [16] \\ b^4 \equiv 0 \; [16] \end{cases}$ أو $\begin{cases} a^4 \equiv 0 \; [16] \\ b^4 \equiv 1 \; [16] \end{cases}$

وعليه: $a^4 + b^4 \equiv 1 \; [16]$

أي: $N \equiv 1 \; [16]$

الحالة (2):
$\begin{cases} a^4 \equiv 1 \; [16] \\ b^4 \equiv 1 \; [16] \end{cases}$

وعليه: $a^4 + b^4 \equiv 2 \; [16]$

أي: $N \equiv 2 \; [16]$

نستنتج أن:
$N \equiv 1 \; [16]$ أو $N \equiv 2 \; [16]$.

③ 1- نضع : $D = p \wedge a$

إذن (p / N)

$$\begin{cases} D/p \\ D/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/N \\ D/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/a^4+b^4 \\ D/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D / a^4 \wedge b^4$$

و $a^4 \wedge b^4 = 1$

وعليه: $D/1$

إذن $D = 1$

وعليه. $\boxed{p \wedge a = 1}$

نضع $d = p \wedge b$

(لأن P/N)

$$\begin{cases} d/p \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/N \\ d/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^4+b^4 \\ d/b^4 \end{cases}$$

$\Rightarrow d/a^4 \wedge b^4$ و $a^4 \wedge b^4 = 1$

$\Rightarrow d/1$

أي $d = 1$

وعليه: $\boxed{p \wedge b = 1}$

2- لدينا $p \wedge a = 1$ حسب خاصية Bezout

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha a + \beta p = 1$$

أي: $(-\alpha) a - \beta p = -1$

نضع: $-\alpha = c$

ومنه، $(\exists c \in \mathbb{Z})$ $ca \equiv -1 [p]$

لدينا، $P/N \Rightarrow N \equiv 0 [p]$

$\Rightarrow a^4 \equiv -b^4 [p]$

ولدينا. $ac \equiv -1 [p] \Rightarrow (ac)^4 \equiv 1 [p]$

و $(ac)^4 \equiv -(bc)^4 [p]$

وعليه، $-(bc)^4 \equiv 1 [p]$

ومنه، $(bc)^4 \equiv -1 [p]$

نضع: $bc = x$ وعليه،

$(\exists x \in \mathbb{Z})$ $x^4 \equiv -1 [p]$

3- ليكن p عدد أولي ومنه : حسب مبرهنة فيرما:

$$x^p \equiv x [p] \Rightarrow x(x^{p-1} - 1) \equiv 0 [p]$$

- نفترض أن $x \equiv 0 [p]$

$x \equiv 0 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 0 [p]$

ولدينا، $x^4 \equiv -1 [p]$ غير صحيح

إذن p لا يقسم x.

وعليه:

$$x^{p-1} \equiv 1 [p]$$

$$\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 / p = 8q + r$$

$$x^4 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^8 \equiv 1 [p]$$
$$\Rightarrow x^{8q+r-1} \equiv x^{r-1} [p]$$
$$\Rightarrow x^{p-1} \equiv x^{r-1} [p]$$

وبالتالي،

$$x^{r-1} \equiv 1 [p]$$

- نبين أن $r = 1$

$0 \leq r < 7$ (باقي القسمة الإقليدية للعدد p على 8)

$r = 0 \Leftarrow$ $p = 8q$ و p أولي إذن $r \neq 0$

$r \notin \{2, 4, 6\}$ لأن p عدد أولي أي p فردي وعليه r فردي

$r = 3 \Leftarrow$ $x^2 \equiv 1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$

ولدينا، $x^4 \equiv -1 [p]$

ومنه، $r \neq 3$

$r = 5 \Leftarrow$ $x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

إذن، $r \neq 5$.

$r = 7 \Leftarrow$

$x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

$x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^6 \equiv -x^2 [p]$

$x^2 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

وعليه $r \neq 7$.

$r = 1 \Leftarrow$ $1 \equiv 1 [p]$

إذن:

$$\boxed{r = 1}$$

التمرين III

$f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}$

1- أ- لنبين أن: $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^3 = 0$

نضع: $X = x^{1/3}$ وعليه، $x = X^3$

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X \to 0^+} X^3(\ln(X^3))^3 = \lim_{X \to 0^+} (3X\ln(X))^3$$

لدينا:

$$\lim_{X \to 0^+} X\ln(X) = 0$$

وعليه:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^3 = 0}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - (\ln x)^3\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^3\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^3 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - x(\ln x)^3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

وعليه:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = +\infty}$$

ب- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^3 = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3 = -\infty$$

وعليه:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty}$$

2) لنبين أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$

نضع: $X = x^{1/3}$ ومنه، $x = X^3$

ومنه:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{(\ln(X^3))^3}{X^3} = \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{3\ln(X)}{X}\right)^3$$

لدينا:

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0 \Rightarrow \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{3\ln(X)}{X}\right)^3 = 0$$

ومنه:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^3}{x}$$

$\Big\{ \lim \ (\ln x)^3$

ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$

إذن: (C_1) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الفواصل

3) f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_1'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3(\ln x)^2}{x} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3(\ln x)^2}{x}\right) < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^{+*})$$

ومنه f_1 متناقصة تماما على $\mathbb{R}^{+}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

4) f_1 مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}^{+*}$

ومنه f_1 تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$.

و $0 \in \mathbb{R}$ إذن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_1 على $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا:

$$f_1(2) = \frac{1}{2} - (\ln(2))^2 > 0$$

$$f_1(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

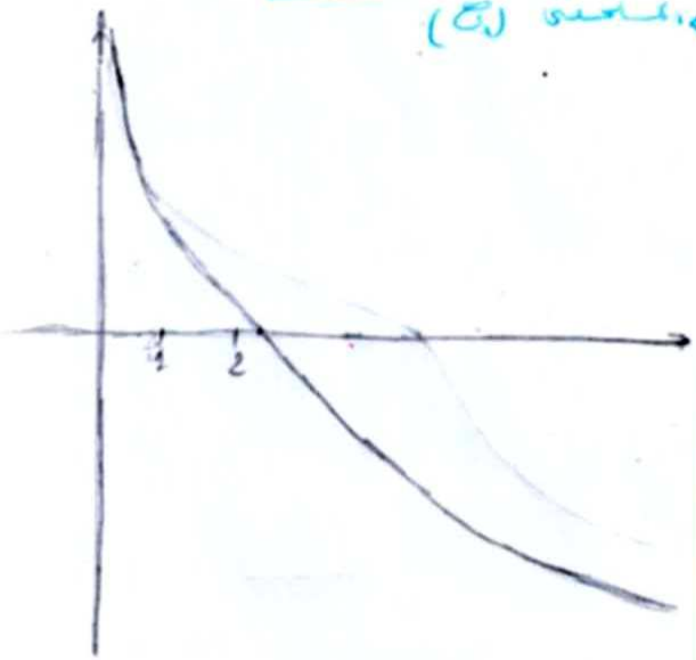
ومنه، f_1 متناقصة على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_1(e) < f_1(\beta_1) < f_1(2)$$

وعليه:

$$\boxed{2 < \beta_1 < e}$$

المنحنى (C_1)



II-①

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{2n+1}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{cases}$$

وعليه :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}-(\ln x)^{2n+1} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1-x(\ln x)^{2n+1}\right)$$

نضع : $x=X^{2n+1}$ ومنه $X=x^{\frac{1}{2n+1}}$

ومنه :

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x)=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{X^{2n+1}}\left(1-\left(X\ln(X^{2n+1})\right)^{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{X^{2n+1}}\left(1-\left((2n+1)X\ln(X)\right)^{2n+1}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases}\lim_{X\to0^+}X\ln(X)=0\\ \lim_{X\to0^+}\frac{1}{X^{2n+1}}=+\infty\end{cases}$$

ومنه :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f_n(x)=+\infty}$$

②

$$f_n'(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}$$

$$=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}\right)<0$$

لدينا: f_n متناقصة تماما و f_n مستمرة على $\mathbb{R}^{+*}$

إذن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_n.

ولدينا :

$f_n(1)=1>0$

$f_n(e)=\frac{1}{e}-1<0$

f_n متناقصة

وعليه :

$$\boxed{1<\beta_n<e}$$

③

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^{2n+3}-\frac{1}{x}+(\ln x)^{2n+1}$$

$$=(\ln(x))^{2n+1}\left(1-(\ln x)^2\right)$$

$\forall x\in[1,e]$ $\quad 0<\ln(x)<1$

$-(\ln(x))^2>-1$

$1-(\ln x)^2>0$ و $(\ln x)^{2n+1}>0$

ومنه :

$$\boxed{f_{n+1}(x)-f_n(x)>0}$$

ب- لدينا : $\forall x\in[1,e]$

$f_{n+1}(x)>f_n(x)$

وبما $\beta_n\in[1,e]$

$f_{n+1}(\beta_n)>f_n(\beta_n)$ و $f_n(\beta_n)=0$

وبما $f_{n+1}(\beta_n)>0$ و $f_{n+1}(\beta_{n+1})=0$

وعليه:

$f_{n+1}(\beta_n)>f_{n+1}(\beta_{n+1})$

f_{n+1} متناقصة على $[1,e]$ و $(\beta_n,\beta_{n+1})\in[1,e]^2$

وعليه

$\beta_n<\beta_{n+1}$

إذن $(\beta_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماما

4- أ-

لدينا : $f_n(\beta_n)=0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_n}=(\ln(\beta_n))^{2n+1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}=\ln(\beta_n)$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n))=\frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)$$

لدينا :

$$\beta_n<e \Rightarrow \frac{1}{\beta_n}>\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)>\ln(e^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)>\frac{-1}{2n+1} \quad \left(\frac{1}{2n+1}>0\right)$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n))>\frac{-1}{2n+1}$$

ولدينا :

$$\frac{-1}{2n+1}>\frac{-1}{2n}$$

وعليه :

$$\boxed{\ln(\ln(\beta_n))>\frac{-1}{2n}} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

ب- لدينا :

$$\ln(\ln(\beta_n))>\frac{-1}{2n} \Rightarrow \ln(\beta_n)>e^{-\frac{1}{2n}}$$

ولدينا :

$$\beta_n<e \Rightarrow \ln(\beta_n)<1$$

وعليه :

$$e^{-\frac{1}{2n}}<\ln(\beta_n)<1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{2n}=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{2n}}=e^0=1$$

([illegible])

ومنه :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(\beta_n)=1$$

أي

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n=e$$