

التمرين الأول

ليكن m عددا عقدي غير منعدم . نعتبر في \mathbb{C} المعادلة :

$$(E) \quad m^2 Z^2 + m^3 Z + 1 - im^2 = 0$$

1) أ- حل المعادلة (E) من أجل $m = -1$

ب- حدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1 + i$ حلا للمعادلة (E) ثم حدد الحل الآخر في كل حالة

2) أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب $\Delta = m^2(m^2 + 2i)^2$

ب- حدد Z_1, Z_2 حلي المعادلة (E)

3) المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر في (P) النقط A, B, M التي أحاطتها على التوالي هي :

$$Z = \frac{m-a}{m-b} \quad \text{ونضع} \quad m, \quad b = \frac{i}{m}, \quad a = -m - \frac{i}{m}$$

أ- بين أن $\left(\bar{Z} = Z \right) \Leftrightarrow \left(\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \text{ أو } \arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi] \right)$

ب- استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون A, B, M نقط مستقيمة

4) ليكن R الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$. نضع $A' = R(A)$ ،

$$M' = R(M) \quad \text{و} \quad B' = R^{-1}(M)$$

أ- حدد a' لحق النقطة A' وبين أن لحق B' هو العدد $b' = -im + \frac{i-1}{m}$

ب- حدد m' لحق النقطة M' وبين أن B منتصف القطعة $[B'M']$

ج- ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و Z_I لحقها .

أحسب $\frac{b'-a'}{b-Z_I}$ و استنتج أن $(A'B') \perp (BI)$ و أن $A'B' = 2BI$

التمرين الثاني

ليكن a, b عددين من \mathbb{Z}^* أوليين فيما بينهما . نضع $N = a^4 + b^4$

1) بين أن $[16] \equiv n^4$ أو $[16] \equiv 1$ لكل عدد n من \mathbb{Z}

2) استنتج أن $[16] \equiv 1$ أو $[16] \equiv 2$

3) ليكن p عددا طبيعيا أوليا أكبر أو يساوي 3 و قاسما للعدد N

أ- بين أن $p \wedge a = 1$ و $p \wedge b = 1$

ب- بين أن : $[p] \equiv -1$ $(\exists c \in \mathbb{Z}) ac \equiv -1$ و استنتج أن $[p] \equiv -1$ $(\exists x \in \mathbb{Z}) x^4 \equiv -1$

ج- ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد p على 8 .

(i) بين أن $[p] \equiv 1$ (ii) بين أن $r = 1$

التمرين الثالث

ليكن n عددا من \mathbb{N}^* و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1} \quad \text{و} \quad (C_n) \text{ هو المنحنى الممثل للدالة } f_n \text{ في } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

(I) 1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 0$ و أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$

2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_1) عند $+\infty$

3) احسب المشتقة $f_1'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f_1

4) بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_1 و أن $\beta_1 \in]2, e[$

5) أرسم المنحنى (C_1) (نأخذ $\beta_1 = 2,2$)

(II) 1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل في المجال $[1, e]$ حلا وحيدا نرمز له بالرمز β_n

3) أ- أدرس على المجال $[1, e]$ إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n \geq 1}$ تزايدية

4) أ- بين أن $\frac{-1}{2n} \leq \ln(\ln \beta_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = e$