

2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	منارة الفردوس
ن: عبدالله بن لخير	الدورة الأولى 2011/2010	نيابة الحميسات
مدة الانجاز: أربع ساعات		

• التمرين رقم 01: (03pts)

تتكن  $f_n$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :

$$. n \in \mathbb{N}^* \text{ حيث } f_n(x) = x^n - 1 + \text{Arctan}(x)$$

(1)- بين أن المعادلة :  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في  $\mathbb{R}^+$  و أن  $0 < \alpha_n < 1$ .

(2)- بين أن :  $(\forall x \in ]0,1[), f_{n+1}(x) < f_n(x)$  ، ثم إستنتج رتبة المتتالية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(3)- بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متقاربة و أعط تأطيرا لنهايتها .

(4)- أثبت بالخلف أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$ .

• التمرين رقم 02: (04pts)

I- تتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$ .

(1)- بين أن  $f$  متصلة و تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}^+$ .

(2)- حل في  $\mathbb{R}^+$  المعادلة :  $f(x) = x$  و أدرس إشارة  $f(x) - x$ .

(3)- حدد ما يلي :  $f([0,1])$  و  $f([1,2])$  و  $f([2,+\infty[)$ .

II- تتكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :

$$. (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 \in \mathbb{R}^+$$

(1)- حدد شرطا كافيا و لازما لكي تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ثابتة .

(2)- نفترض أن  $u_0 \in [0,1[$  ، بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و أحسب نهايتها .

(3)- نفترض أن  $u_0 \in ]1,2[$  ، بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و أحسب نهايتها .

(4)- نفترض أن  $u_0 \in ]2,+\infty[$  ، بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تزايدية قطعا و أثبت أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

• التمرين رقم 03: (03pts)

تتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $I = ]0,1[$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\pi x)}}$

(1)- بين أن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  معرفة على مجال  $J$  ينبغي تحديده .

(2)- أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f^{-1}$  على  $J$  ، ثم أحسب  $(f^{-1})'(x)$  تكن  $x \in J - \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

(3)- بين أن المعادلة :  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $I = ]0,1[$

(4)- لتكن المتتالية  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بما يلي :  $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n^2 + k}\right)$  ،  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

أ- بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n^2 + 1}\right) \leq S_n \leq f^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{2n^2}\right)$

ب- إستنتج أن المتتالية  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متقاربة محدا نهايتها .

• التمرين رقم 04: (04pts)

ليكن  $x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

و لتكن المتتالية  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بما يلي :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , a_n = \sqrt[n]{x}$

(1)- نفترض أن  $x \in ]0,1[$  ، بين أن المتتالية  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تزايدية قطعا و إستنتج أنها متقاربة .

(2)- نفترض أن  $x \in ]1, +\infty[$  ، بين أن المتتالية  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تناقصية قطعا و إستنتج أنها متقاربة .

(3)- بين أن لكل  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $(a_{n+1})^2 = a_n$  ، ثم أحسب نهاية المتتالية  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

⇐ نعتبر المتتاليتين  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  و  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفتين بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) , c_n = 2^n \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)$  و  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , b_n = 2^n (a_n - 1)$

(4)- بين أن المتتاليتين  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  و  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متحاديتان ( غير مطلوب حساب نهايتهما المشتركة ) .

(5)- تكن  $n \in \mathbb{N}^*$  ، نضع :  $d_n = \prod_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$  ، حيث  $a$  عدد حقيقي من المجال  $]1,4[$

⇐ بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , 0 < d_n < (\sqrt{a} - 1)^n$  ، ثم إستنتج أن  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متقاربة محدا نهايتها .

• التمرين رقم 05: (06pts)

I- نعتبر الدالة  $\varphi$  المعرفة على  $[0, \pi]$  بما يلي :  $\varphi(x) = \cos(x)$  .

(1)- بين أن  $\varphi$  تقبل دالة عكسية  $\varphi^{-1}$  محددًا مجموعة تعريفها  $D_{\varphi^{-1}}$  .

(2)- بين أن  $\varphi^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $] -1, 1[$  وأن :  $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  ( $\forall x \in ] -1, 1[$ ) .

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  بما يلي :  $f(x) = \varphi^{-1}(\sin^2 x)$  .

(1)- بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  وأن :  $f'(x) = \frac{-2 \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$  ( $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ) .

(2)- بتطبيق مبرهنة التزايد المتتالية على  $f$  في المجال  $\left[x, \frac{\pi}{2}\right]$  ، حيث  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  أثبت ما يلي :

$$\frac{-2}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} < \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} < \frac{-2 \sin x}{\sqrt{2}}$$

(3)- استنتج أن  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  و اعط تأويلا للنتيجة المحصل عليها .

(4)- بين أن المعادلة :  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  وأن  $\alpha = \varphi^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  .

(5)- تحقق أن :  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$  .

III- لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  بما يلي :  $h(x) = f \circ f(x)$  .

(1)- بين أن :  $h\left(\left[0, \alpha\right]\right) \subset \left[0, \alpha\right]$  (تحديد صيغة  $h(x)$  غير مطلوب) .

(2)- لتكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = h(u_n) \text{ و } u_0 = \frac{\pi}{4}$$

⇐ بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < \alpha$  ، وأن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصية قطعاً .

(3)- بين أن :  $(\forall x \in I), h(x) = \varphi^{-1}(1 - \sin^4 x)$  .

(4)- بين أن لكل  $x \in I$  :  $x \in \left\{0, \alpha, \frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow h(x) = x$  .

(5)- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و حد نهايتها . (إنتهى الموضوع)

◀ تمارين إضافية:

• التمرين رقم 01: (01pt)

تكن  $n \in \mathbb{N}^*$  ، نضع :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$

◀ أثبت أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متقاربة ( حساب نهايتها غير مطلوب ) .

• التمرين رقم 02: (01pt)

تتكن  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة بحيث :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$  و  $a_n \neq 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) .

◀ أحسب النهاية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a_n + a_n^2 + a_n^3 + \dots + a_n^k) - k}{a_n - 1}$  ، حيث  $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

• التمرين رقم 03: (01pt)

تكن  $n \in \mathbb{N}^*$  ، نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f_n(x) = \sqrt{2^n \cos^{2n}(x) + \sin^{2n}(x)}$

◀ حدان نهاية المتتالية  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$  تبعاً لقيم العدد الحقيقي  $a$

• التمرين رقم 04: (02pts)

ليكن  $a \in \mathbb{R}^*$  و  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), x_{n+1} = x_n \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n(1+x_n^2)} \right) \text{ و } x_1 = a$$

◀ بين أن المتتالية  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :  $y_n = \frac{x_n}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) تؤول إلى 0 .

◀ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .