

التمرين الأول

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{a}{\sqrt{x-1}} ; \quad x \geq 4 \\ f(x) = \frac{x+b}{x-5} ; \quad x < 4 \end{array} \right.$$

(1) حدد العلاقة بين a و b كي تكون الدالة f متصلة على \mathbb{R}

(2) حدد العددين a و b كي تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

التمرين الثاني

لتكن f دالة معرفة على المجال $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ بما يلي :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{\tan x} ; \quad x \neq \frac{\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right.$$

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$

(2) بين أن $-2 \leq f'(x) \leq -1$ ($\forall x \in I$)

(3) استنتج أن $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1 - \tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$

التمرين الثالث

ليكن n من \mathbb{N}^* ونعتبر الدالة f المعرفة على $I = \left] -1, \frac{\pi}{2} \right[$ بما يلي :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt[n]{x+1} - \frac{1}{\sqrt[n]{x+1}} ; \quad x \in \left] -1, 0 \right[\\ f(x) = -1 + \frac{1}{\cos^n x} ; \quad x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\end{array} \right.$$

(1) أ) بين ان الدالة f متصلة على I

ب) أدرس منحى تغيرات الدالة f على المجال I

(2) أ) بين ان الدالة f تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^n - 1 ; \quad x \in \left] -\infty, 0 \right[\\ f^{-1}(x) = \arctan \left(\sqrt{(x+1)^{\frac{2}{n}} - 1} \right) ; \quad x \in \left] 0, +\infty \right[\end{array} \right.$$

ب) بين أن

التمرين الرابع

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $[a, b]$.

$$\text{نضع } g(x) = \frac{f(a) + f(x)}{2} - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{(x-a)^2}{8} K \text{ بحيث } g(b) = 0$$

(1) أ) بين أن $g'(d) = 0$ ($\exists d \in]a, b[$)

ب) تحقق أن : $f'(d) - f'\left(\frac{d+a}{2}\right) = \frac{K}{2}(d-a)$

(2) استنتج أن :

$$(\exists c \in]a, b[) \frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c)$$

الله ولي التوفيق