مدة الإنجــاز: 4 ساعات

الثانية باك ع-رياضية

2013/04/24

مادة الرياضيات

الإمتحان التجريبي الثاني

دورة أبريل 2013

Inisse Groupe scolaire

التمرين الأول: (4 ن) A - نعتبر المجموعة $G=\mathbb{R}-\{\sqrt{3}\}$. لكل a و b من G نضع : $a*b=a+b-\frac{ab}{\sqrt{3}}$.

1)تحقق من أن $\forall(a,b)\in G^2\ a*b=\sqrt{3}-\sqrt{3}(\frac{a}{\sqrt{3}}-1)(\frac{b}{\sqrt{3}}-1)$ 0,5

2)بين أ ن $(G,*)$ زمر ة تبا دلية . 1

B نعتبر المجموعة $E=\left\{M(a)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-a & a\\ a & 2\sqrt{3}-a\end{pmatrix}/a\in G\right\}$, و المصفو فتين $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1) أ- تحقق من أ ن $J^2=-2J$ و أن $\forall a\in G,\ M(a)=I+\frac{a}{2\sqrt{3}}J$ 0,5

ب- بين أ ن المجموعة E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$. 0,5

2) نعتبر التطبيق $\begin{array}{l} f:G\to E\\ a\mapsto M(a)\end{array}$

أ- بين أن f تشا كل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$. 1

ب- استنتج بنية $(E,\times)$. 0,5

التمرين الثاني(3.5 ن) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية (E) : $z^2-az+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$ حيث a عدد عقدي. وليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E) .

1) بين أن $\arg z_0+\arg z_1\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ وأن $|z_0||z_1|=1$ 0,25

2) أ- نضع $z_0=\cos\theta+i\sin\theta$ (θ عدد حقيقي) بين أن: $a=2\cos(\theta-\frac{\pi}{6})e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0,5

ب- استنتج أنه إذا كان $z_0=i$ فإن $1+ia-a^2-ia^3+a^4+ia^5=0$ 0,5

3) نفترض أن $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

أ- حدد العدد z_1 على شكليه المثلثي والجبري ثم استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$. 0,5

ب- حدد العدد a على شكليه المثلثي والجبري 0,5

4) نعتبر ،في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط M_0 و A و M_1 التي ألحاقهما على التوالي هي: a و z_0 و z_1 حيث $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

ليكن التحويل R الذي يحول كل نقطة $M(z)$ إلى $M'(z')$ بحيث : $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)z$

أ- حدد طبيعة والعناصر المميزة للتحويل R . 0,25

ب- بين أن $R(M_0)=M_1$ ثم استنتج طبيعة OM_0AM_1 0,5

ج- استنتج عمدة ومعيار العدد العقدي a . 0,5

التمرين الثالث: (2,5 ن) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $x^4+781=3y^4$ (F)

1) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ أو $x^4\equiv 0[5]$ 0,5

ب- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$ $x^4+781\equiv 2[5]$ أو $x^4+781\equiv 1[5]$ 0,5

ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (F) . 0,75

2)هل يوجد عددين صحيحين طبيعيين x و y بحيث $\overline{10000}_{(x)}+\overline{781}_{(10)}=\overline{30000}_{(y)}$ ؟ 0,75

مسألة (10 ن)

		الصفحة
A - نعتبر الدالة f المعرفة على $D =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ بما يلي .		$\frac{2}{2}$
$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln(1+\frac{1}{x}) & x \in D-\{-1\} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$		
ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$		
1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.	0,25	
ب- بين أن الدالة f متصلة في -1 على اليسار .	0,25	
ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في -1 ثم أعط تأويلا هندسيا لذلك .	0,50	
2 - أ- بين أن : $(\forall t \in]-1,+\infty[)\quad \frac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t$	0,50	
ب- استنتج أن : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad 1 < f(x) < \frac{x+1}{x}$	0,50	
وأن: $(\forall x \in]-\infty,-1[)\quad \frac{x+1}{x} < f(x) < 1$		
ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)	0,50	
3- ادرس تغيرات الدالة f .	0,50	
4 -أنشئ المنحنى (C_f) .	0,50	
5- ليكن λ عددا حقيقيا بحيث $0<\lambda<1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$. احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ .	0,50	
B- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $I =]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}$		
1- أحسب النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة g	0,50	
2- أ- احسب $g'(x)$ $(\forall x \in]0,+\infty[)$.	0,50	
ب- ضع جدول تغيرات الدالة g .	0,50	
3 - أ -بين أن : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} < e$	0,50	
ب- استنتج أن : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad e < g(x) < e + \frac{e}{x}$	0,50	
4- نعتبرالمتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\begin{cases} u_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \\ v_n = (1+\frac{1}{n})^n \end{cases}$		
أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\begin{cases} \ln u_n = f(n) \\ \ln v_n = f(-1-n) \end{cases}$.	0,25	
ب - بين أن : $v_n < e < u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$	0,50	
ج - بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتاليتان متحاديتان وأحسب نهايتهما .	0,50	
C- نعتبر الدالة F المعرفة على $]1,+\infty[$ بمايلي : $F(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)dt$		
1- بين أن : $(\forall x>1)\quad F(x)-g(x) \ge 0$	0,50	
2- أحسب $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$	0,25	
3 - أ- بين أن : $(\forall x > 1)\quad g(x) \le F(x) \le e + \frac{e\ln x}{x-1}$	0,50	
ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$	0,25	
4- أحسب : $F'(x)$ $(\forall x>1)$ وأعط جدول تغيرات F	0,75	