

فرض رقم 2

التمرين الأول :

لكل متتالية معرفة بما يلي :

$$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2 + p} \quad \text{لكل عدد طبيعي غير منعدم } n$$

$$(1) \quad \text{بيء أنه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 - \frac{2}{n+1} \leq U_n \leq 2 + \frac{2}{n}$$

$$(2) \quad \text{أ- تحقق أنه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq \frac{1}{2n}$$

$$\text{ب- استنتج أنه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \leq 2\sqrt{n}$$

$$(3) \quad \text{نضع } S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k \quad \text{لكل عدد طبيعي غير منعدم } n$$

$$\text{بيء أنه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$$

$$\text{و حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$$

التمرين الثاني :

لكل متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

$$T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_{n-1}} \quad \text{و } P = U_0 U_1 \dots U_{n-1}$$

$$(1) \quad \text{بيء أنه } \frac{S}{T} = U_0^2 q^{n-1}$$

$$(2) \quad \text{استنتج أنه } P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$$

التمرين الثالث :

$$\text{نعتبر المتتاليتين } (U_n)_n \text{ و } (V_n)_n \text{ المعرفتين بما يلي : } U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{و } V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

(1) بيء أنه $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متنازيتيه

$$(2) \quad \text{نضع } f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$\text{أ- بيء أنه } f'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$$\text{ب- أثبت أنه } (\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f_{2n+1}(x) \leq \arctan x \leq f_{2n}(x)$$

$$\text{ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين } (U_n)_n \text{ و } (V_n)_n$$

التمرين الرابع :

لكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3 نضع $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$

$$(1) \quad \text{بيء أنه المعادلة } f_n(x) = 0 \text{ تقبل حلييه } u_n \text{ و } v_n \text{ حيث أنه } u_n < 1 < v_n$$

$$(2) \quad \text{أ- أدرس إشارة } f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

ب- أدرس رتبة المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة

$$\text{ج- بيء أنه } (\forall n \geq 3) : \frac{-2}{n} \leq u_n - 1 \leq \frac{-1}{n} \quad \text{ثم حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(3) \quad \text{أ- أدرس رتبة المتتالية } (v_n)_n \text{ و استنتج أنها متقاربة}$$

$$\text{ب- بيء أنه } (\forall n \geq 3) \quad v_n > 1 + \frac{1}{n} \quad \text{نعطي } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (\forall n \geq 3)$$

$$\text{ب- بيء أنه } (\forall a > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (1+a)^n \geq 1+na + \frac{n(n-1)}{2} a^2$$

$$\text{ج- أحسب } f_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ و استنتج أنه } (\forall n \geq 3) \quad v_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{د- حدد نهاية المتتالية } (v_n)_n$$