

التمرين رقم 01

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \left| \text{Arc tan } \frac{1}{x} \right|, & x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

الجزء الأول:

1 - بين أن: $0 < \frac{x - \text{Arc tan } x}{x^2} < \frac{x}{3}$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$ ن

2 - بين أن: $\text{Arc tan } |x| + \text{Arc tan } \frac{1}{|x|} = \frac{\pi}{2}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ ن

b - استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^2 \text{Arc tan } \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = -(1+\pi)$ ن

و أن: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(x-1)^2 \text{Arc tan } \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = (1-\pi)$ ن

3 - أحسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$ ن 0,5

b - نضع: $t = \frac{1}{x}$

تحقق أن: $f(x) - (x-2) = 2 + (t-2) \frac{\text{Arc tan } t}{t} + \frac{\text{Arc tan } t - t}{t^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ ن 0,75

الجزء الثاني:

1 - أحسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ن

2 - أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0 ن 0,5

b - أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة 0 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها ن 0,5

3 - باستعمال نتائج السؤال (3) من الجزء الأول حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ن

4 - لكل x من \mathbb{R}^* نضع: $h(x) = 2 \text{Arc tan } \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{x-1}{x^2+1}$ ن 1,5

a - أدرس تغيرات الدالة h ن 1,5

b - استنتج إشارة الدالة h على \mathbb{R}^* ن 0,5

c - بين أن: $\begin{cases} (\forall x > 0) & f'(x) = (x-1)h(x) \\ (\forall x < 0) & f'(x) = (1-x)h(x) \end{cases}$ ن

d - استنتج جدول تغيرات الدالة f ن 0,5

5 - ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty, 0[$. أثبت أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ن 0,5

سلم
التنقيط

ن

ن

ن

ن 0,5

ن 0,75

ن

ن 0,5

ن 0,5

ن

ن 1,5

ن 0,5

ن

ن 0,5

ن 0,5

6 - أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) المنحنيين (C_f) و $(C_{g^{-1}})$

7- ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $0 < x < y$

بين أن: $(\exists \alpha \in]x, y[) \quad f(y) - f(x) < (y-x)(\pi+1)|\alpha-1|$

8- لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} U_0 \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\\ U_{n+1} = \frac{f(U_n)}{2(U_n-1)} + 1, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \neq 1$

b- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - 1| \leq \frac{\pi}{4} |U_n - 1|$

c- استنتج نهاية المتتالية (U_n)

2 ن

1,75 ن

0,5 ن

0,75 ن

0,75 ن

التمرين رقم 02

نربط كل عدد حقيقي a غير منعدم بالدالة العددية f_a المعرفة كما يلي:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{a} \right\} \right) \quad f_a(x) = A \operatorname{rctan} \left(\frac{x+a}{1-ax} \right)$$

1 - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x)$ ثم بين أن: $f'_a(x) = \frac{1}{1+x^2}$ لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{a} \right\}$

2- نفترض أن $a \in \mathbb{R}_+^*$

بين أنه مهما يكن x من $\left] \frac{1}{a}, +\infty \right[$ فإن: $f_a(x) = A \operatorname{rctan} x + A \operatorname{rctan} a$

و أنه مهما يكن x من $\left] -\infty, \frac{1}{a} \right[$ فإن: $f_a(x) = A \operatorname{rctan} x + A \operatorname{rctan} a + \pi$

3- أ - تحقق أنه مهما يكن x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{a} \right\}$ فإن: $-f_{-a}(-x) = f_a(x)$

ب - استنتج أنه إذا كان $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإن:

$$\begin{cases} \left(\forall x > \frac{1}{a} \right) & f_a(x) = \operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan(a) - \pi \\ \left(\forall x < \frac{1}{a} \right) & f_a(x) = \operatorname{Arc} \tan(x) + \operatorname{Arc} \tan(a) \end{cases}$$

1 ن

1 ن

0,25 ن

0,75 ن