تصحيح الغرض "2"

الأسدس "2"

الجزء (1)

1) لدينا: $D_f = \mathbb{R}$

اذن $(x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R})$

$x\neq 0$

و: $f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x}$

$= f(x)$

(لأن: $t\mapsto \arctan(t)$ دالة فردية).

← اذن الدالة f دالة زوجية.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$)

---

2) $(\forall t\in\mathbb{R}^+)$: $t^4\geq 0 \Rightarrow -t^4\leq 0$

$\Rightarrow 1-t^4\leq 1$

وحيث: $1-t^4 = (1-t^2)(1+t^2)$

و $(1+t^2>0)$،

اذن، $(1-t^2)(1+t^2)\leq 1$

أي ① $\left(1-t^2 \leq \frac{1}{1+t^2}\right)$

ولدينا أيضا، $(\forall t\in\mathbb{R}^+)$ $t^2+1\geq 1$

اذن ② $\left(\frac{1}{t^2+1}\leq 1\right)$

② و ① $\Rightarrow 1-t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$.

- لدينا $(\forall t\in\mathbb{R}^+)$ $1-t^2 \leq \frac{1}{t^2+1}\leq 1$

$(x>0)$ $\int_0^x (1-t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^x dt$

$\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^x \leq \left[\mathrm{Arct}(t)\right]_0^x \leq [t]_0^x$

أي $x-\frac{x^3}{3} \leq \mathrm{Arct}(x) \leq x$

ب. لنحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

أي: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x-0}$

أي $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{Arctan}(x)-x}{x^2}$

ولدينا $(\forall t\geq 0)$ $t-\frac{t^3}{3} \leq \mathrm{Arct}(t) \leq t$

إذن $-\frac{x^3}{3} \leq \mathrm{Arct}(x)-x \leq 0$

أي $-\frac{x}{3} \leq \frac{\mathrm{Arct}(x)-x}{x^2} \leq 0$

وحيث $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{-x}{3}\right)=0$

اذن $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

---

3) أ- نعتبر، $t \xrightarrow{f} \mathrm{Arct}(t)$

f دالة متصلة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$. اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية .

$(\exists c\in]0,x[)$ $\mathrm{Arct}(x)-\mathrm{Arct}(0) = (x-0)\,f'(c)$

أي $\mathrm{Arct}(x) = x\,f'(c)$

وحيث: $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$.

و $0\leq c\leq x \Rightarrow 1\leq c^2+1 \leq x^2+1$

أي $\frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{x^2+1}$

أي $(x>0)$ $\frac{x}{1+c^2} \geq \frac{x}{x^2+1}$

أي $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$ $\mathrm{Arct}(x) \geq \frac{x}{x^2+1}$

ب - لدينا f قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$

و $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)x-\text{Arct}(x)}{x^2}$

$$=\frac{x-(1+x^2)\,\text{Arct}(x)}{(1+x^2)\,x^2}$$

. لدينا $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad \arctan(x)\geq\dfrac{x}{x^2+1}$

أي $x-\text{Arctan}(x)(x^2+1)\leq 0$

أي $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ :\ f'(x)\leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0\nearrow$	1	$\searrow 0$

(لأن الدالة f دالة زوجية)

الجزء (2).

1) لدينا ، $D_g=\mathbb{R}$

اذن $(x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R})$ $x\neq 0$

أي $g(-x)=\dfrac{1}{(-x)}\displaystyle\int_0^{(-x)}f(t)\,dt$

نضع : $(-t=u)$ أي $(dt=-du)$

و $\begin{cases} t=0\Rightarrow u=0\\ t=x\Rightarrow u=x\end{cases}$

اذن $g(-x)=\dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(-u)\,du$

وبما أن الدالة f دالة زوجية $(f(x)=f(-x))$

اذن $g(-x)=\dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x -f(u)\,du$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du=g(x)$$

الدالة g دالة زوجية

2) أ. لدينا $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt$

$$=\frac{1}{x}\left[\int_0^x 1\,dt-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[[t]_0^x-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[x-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=1-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$=1-g(x)$$

اذن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 1-g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt$

2) ب. لدينا حسب (جزء I - 3) ب)

$(\forall t\in\mathbb{R}^+)\quad \text{arct}(t)\geq\dfrac{t}{1+t^2}$

$(t>0)\quad \dfrac{\text{arct}(t)}{t}\geq\dfrac{1}{1+t^2}$

يعني $f(t)\geq\dfrac{1}{1+t^2}$

أي $1-f(t)\leq 1-\dfrac{1}{1+t^2}$

$x>0\quad \displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leq\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$x>0\quad \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leq\frac{1}{x}(x-\text{Arct}(x))$

وبما أن $(\forall t\in\mathbb{R})\quad 0\leq f(t)\leq 1$

وذلك حسب سؤال (3. ب)

أي ، $1-f(t)\geq 0$

أي $\Rightarrow 0\leq\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leq 1-\frac{\text{Arct}(x)}{x}$

أي $0\leq 1-g(x)\leq 1-f(x)$

، $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} 1-f(x)=1-1=0\\ 1-g(x)\geq 0\end{array}\right\}$ و

اذن $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=1=g(0)$

أي أن g متصلة عند $x=0$

ج - لنحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-1}{x}$

- لدينا $0\le 1-g(x)\le 1-f(x)$

أي $f(x)-1\le g(x)-1\le 0$

$(x>0)$ $\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

① $\frac{Arct(x)-x}{x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0.$

$arct(x)\ge\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow Arct(x)-x\ge\frac{-x^3}{1+x^2}.$

أي ② $\frac{Arct(x)-x}{x^2}\ge\frac{-x^2}{1+x^2}$

ادن من ① و ② نستنتج $\frac{-x^2}{1+x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{1+x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$

ادن g قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $g'_d(0)=0$

وحينا $1-\frac{t^2}{3}\le f(t)\le 1$

$\left[t-\frac{t^3}{9}\right]_0^1\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$

$1-\frac{1}{9}\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$

أي $(x>0)$ $\frac{8}{9x}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\frac{1}{x}$

ادن: ① $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt=0$

وحسب $0\le\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2x}\ln(x)$

ادن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x}\ln(x)=0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

لدينا $(\forall t\in[1,+\infty[)\quad 0\le arct(t)\le\frac{\pi}{2}$

أي $t>0$ $0\le\frac{arct(t)}{t}\le\frac{\pi}{2t}$

$(x\ge 1)$ $0\le\int_1^x\frac{arct(t)}{t}\,dt\le\int_1^x\frac{\pi}{2t}\,dt$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\left[\frac{\pi}{2}\ln(t)\right]_1^x$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2}\ln(x).$

ومنه النتيجة.

---

3) ب - لدينا $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

$=\frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt\right)$

$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

---

4) أ. $x\xmapsto{u}\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

وحيث $f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ ادن تقبل دالة أصلية F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

أي $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$

أي $x\xmapsto{v}\int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

ادن: $x\xmapsto{u.v} g(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$g'(x)=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}f(x)$

$=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(\frac{Arctan(x)}{x}\right)$

$x^2g'(x)=Arct(x)-\int_0^x f(t)\,dt$

الجزء (3)

① أ. بين أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*;\ f(x)\le g(x)<1$

لدينا حسب السؤال 3 - أ - الجزء (1): $x>0$

$$\frac{\arctan(t)}{t}\ge\frac{1}{1+t^2};\ t\in[0;x]$$

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \ge \int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt;\ t\in[0;x]$$

يعني أن $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt\ge \arctan(x)$

إذن $\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\arctan(t)}{t}dt \ge \frac{\arctan(x)}{x};\ x>0$

$$\Longleftarrow\quad \forall x>0;\ g(x)\ge f(x)$$

ولدينا انطلاقا من جدول تغيرات g:

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*;\ g(x)<1$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x)\le g(x)<1$

ب- استنتج أن: $|g'(x)|\le\frac{1}{x}(1-f(x));\ x>0$

لدينا حسب 4 - أ -

$$\forall x\in]0;+\infty[;\ g'(x)=\frac{1}{x}\big(f(x)-g(x)\big)$$

$$|g'(x)|=\frac{1}{x}|f(x)-g(x)|\quad,\forall x>0$$

ولدينا حسب السؤال السابق: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x)\le g(x)$

إذن $|g'(x)|=\frac{1}{x}(g(x)-f(x));\ \forall x>0$

ولدينا أيضا حسب السؤال السابق $g(x)\le 1/\forall x>0$

إذن $\frac{1}{x}(g(x)-f(x))\le\frac{1}{x}(1-f(x));\ \forall x>0$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ |g'(x)|\le\frac{1}{x}\big(1-f(x)\big)$

ج- تحقق أن:

$$\forall x\in\mathbb{R}^*:\ \frac{1}{x}\big(1-f(x)\big)=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

لدينا $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt=\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x 1-\frac{1}{1+t^2}dt\right)$

$$=\frac{1}{x^2}\Big[t-\arctan(t)\Big]_0^x=\frac{1}{x}-\frac{\arctan(x)}{x^2}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}^+:\ \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt$

لأن $\left[\frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x}\left(1-\frac{\arctan(x)}{x}\right)\right]$

ب- تحقق أن $x h'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\arctan(x)$

لكل x من $]0;+\infty[$:

لدينا $\forall x\in]0;+\infty[;\ h(x)=x^2g'(x)$

يعني أن $h(x)=\arctan(x)-\int_0^x f(t)dt$

إذن $h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\arctan(x)}{x}$

$$\boxed{x h'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\arctan(x)}$$

ج- استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0;+\infty[$

ثم ضع جدول تغيرات g :

لدينا حسب السؤال 3 - أ -

$$\forall x\in]0;+\infty[;\ \arctan(x)\ge\frac{x}{1+x^2}$$

إذن $\frac{x}{1+x^2}-\arctan(x)\le 0$

يعني أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*;\ x h'(x)\le 0$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*;\ h'(x)\le 0$

ولدينا $h(0)=0^2\times g'(0)=0$

x	0	$+\infty$
$h(x)$	0 $\searrow$	

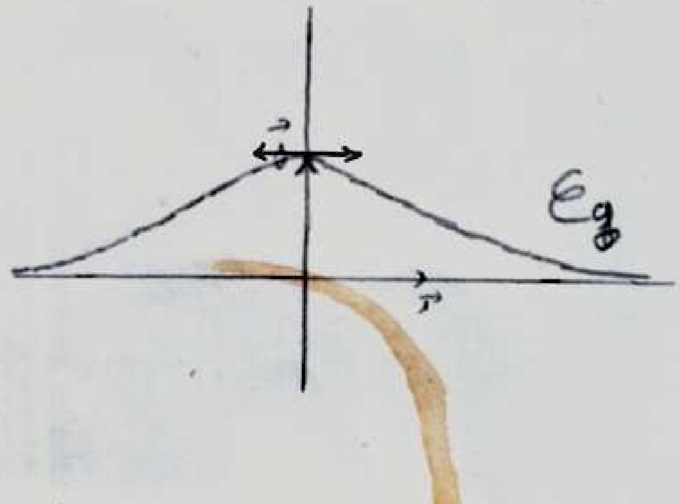
إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ h(x)<0$

ولدينا $\forall x\in\mathbb{R}_+^*;\ h(x)=x^2g'(x)$

إذن $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ g'(x)<0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	0 $\nearrow$	1	$\searrow$ 0

⑤ رسم المنحنى:



2- أ- بين أن : $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad 0\leq \frac{t}{1+t^2}\leq \frac{1}{2}$

لدينا $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \ (t-1)^2\geq 0 \Rightarrow t^2+1\geq 2t$

إذن $\frac{1}{t^2+1}\leq \frac{1}{2t} \Rightarrow \frac{t}{t^2+1}\leq \frac{1}{2}$

ونعلم أن $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad \frac{t}{1+t^2}\geq 0$

إذن $\forall t\in\mathbb{R}_+^* \quad 0\leq \frac{t}{1+t^2}\leq \frac{1}{2}$

ب- استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq \frac{1}{4}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$:

انطلاقا من 1-ب و 2-ج نستنتج أن

$|g'(x)|\leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

ولدينا حسب السؤال السابق :

$\forall t\in[0;x] \quad 0\leq \frac{t^2}{1+t^2}\leq \frac{1}{2}t$

$t\in[0;x] \ ; \ \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt$

إذن $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{4}x^2$

يعني أن $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\leq \frac{1}{4}$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq \frac{1}{4}$

3- بين أن $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

نضع $h(x)=g(x)-x$

$x\to h(x)$ ق. الاشتقاق على $]0;1[$

$h'(x)=g'(x)-1<0$ إذن h تناقصية قطعا على $]0;1[$

ولدينا $h(0)=1$ و $h(1)=g(1)-1$

ولدينا $\forall x\in[0;1] \ g(x)\leq 1$

إذن $h(1)=g(1)-1\leq 0$

إذن $h(0)\times h(1)\leq 0$ و $x\to h(x)$ متصلة على $[0;1]$ وقابلة للاشتقاق عليه .

إذن $\exists!\,\alpha\in[0;1] \ ; \ g(\alpha)=\alpha$

4) أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\leq u_n\leq 1$

من أجل $n=0$ لدينا $0\leq u_0=0\leq 1$ ✓

نفترض أنه $0\leq u_n\leq 1$ ولنبين أن $0\leq u_{n+1}\leq 1$

لدينا $0\leq u_n\leq 1$ و g تناقصية ومتصلة على $[0;1]$

إذن $g(1)\leq g(u_n)\leq g(0)$

إذن $0\leq u_{n+1}\leq 1$ ✓

إذن حسب البرهان بالترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ 0\leq u_n\leq 1$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} : |u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

لدينا $0\leq u_n\leq 1$ و $\alpha\in[0;1]$ و $g(\alpha)=\alpha$ | و متصلة على $[0;1]$ و ق. الاشتقاق عليه

إذن بتطبيق TAF على مجال طرفاه α و u_n

نجد أن $|g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\,|u_n-\alpha|$

حيث أن $c\in]0;1[$

ونعلم أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad |g'(x)|\leq \frac{1}{4}$

إذن $c\in]0;1[\quad |g'(c)|\leq \frac{1}{4}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ |g'(c)|\,|u_n-\alpha|\leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

ولدينا $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ |g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\,|u_n-\alpha|$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha| \ ; \ \forall n\in\mathbb{N}$

ج- استنتج نهاية u_n وبين أنها متقاربة

لنبين أولا أن $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ |u_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_0-\alpha|\leq 1$

وهذا صحيح لأن $(\alpha;u_0)\in[0;1]^2$

نفترض أن $|u_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولنبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $|u_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن $\frac{1}{4}|u_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن حسب افتراض الترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ |u_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0 \ ; \ \left|\frac{1}{4}\right|<1$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n-\alpha=0$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha}$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة .

أسئلة مستقلة

1 - حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة كالتالي:

$$u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

لدينا $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

حيث $f(x) = x^p$

f دالة متصلة وق. للاشتقاق على $]0;1[$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{p+1}$$

2 - ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بين أن

$$|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$$

نعلم أن: $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z \times z'|$

ولدينا $(1+|z|^2)(1+|z'|^2) = 1 + |z'|^2 + |z|^2 + |zz'|^2$

نعلم أن $(|zz'|-1)^2 \geq 0$

إذن $|zz'|^2 + 1 \geq 2|z \cdot z'|$

$|zz'|^2 + 1 + |z| + |z'| \geq 2|z \times z'| + |z|^2 + |z'|^2$

إذن $|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$

3 - بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن

$|1+z| \geq 1$ أو $|1+z^2| \geq 1$

لدينا $|z|=1$ إذن $\exists \theta \in]-\pi;\pi] ; z = e^{i\theta}$

ولدينا $|1+z| = |1+e^{i\theta}| = |2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}|$

إذن

$|1+z| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$

إذا كان $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ أي أن $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

فإن $|\cos\frac{\theta}{2}| \geq \frac{1}{2}$ ومنه فإن $|1+z| \geq 1$

وإذا كان $\theta \notin \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ فإن

$\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ أي أن $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

ولدينا

$|1+z^2| = |1+e^{2i\theta}|$

$|1+z^2| = |2\cos\theta\, e^{i\theta}| = 2|\cos\theta|$

ولدينا $\forall \theta \in]-\pi;-\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3};\pi] ; |\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

إذن $|1+z^2| \geq 1$

خلاصة:

$|z|=1$ ← $|1+z| \geq 1$ أو $|1+z^2| \geq 1$

من انجاز:

- مهدي بنكروم
- وليد حفيظ الدين

باشراف الأستاذ العمانى