مسألة (16 نقطة)

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{\arctan x}{x} \quad ; \quad x\neq 0$$

1) بين أن f زوجية و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (1 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^{+})\quad 1-t^2\leq \frac{1}{1+t^2}\leq 1$ (0.5 ن)

و استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad x-\frac{x^3}{3}\leq acr\tan x\leq x$ (0.5 ن)

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$ (0.5 ن)

3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+})\quad \arctan x\geq \frac{x}{1+x^2}$

ب- أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f (0.5 ن)

الجزء (2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(0)=1 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad ; \quad x\neq 0$$

1) بين أن الدالة g زوجية (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 1-g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x (1-f(t))\,dt$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن g متصلة على يمين $x_0=0$ (1 ن)

ج- بين أن g قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$ و أن $g'_d(0)=0$ (0.5 ن)

3) أ- بين أن $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0\leq \int_1^x f(t)\,dt\leq \frac{\pi}{2}\ln x$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ (1 ن)

4) أ- بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و أن $x^2g'(x)=\arctan x-\int_0^x f(t)\,dt$ لكل x من $]0,+\infty[$ (1) (1ن)

ب- نضع $h(x)=x^2g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

تحقق أن $x\,h'(x)=\frac{x}{1+x^2}-\arctan x$ لكل x من $]0,+\infty[$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g (1ن)

5) أرسم منحنى الدالة g (0.5 ن)

الجزء (3)

1) أ- بين أن $f(x)\leq g(x)\leq 1\quad (\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad (2)$ (1 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq \frac{1}{x}(1-f(x))$ (1 ن)

ج- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{*})\quad \frac{1}{x}(1-f(x))=\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ (0.5 ن)

2) أ- بين أن $(\forall t\in\mathbb{R}^{+*})\quad 0\leq \frac{t}{1+t^2}\leq \frac{1}{2}$ (0.5 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad |g'(x)|\leq \frac{1}{4}$ (0.5 ن)

3) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل في المجال $[0,1]$ حلا وحيدا α (0.5 ن)

4) نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=g(u_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n\leq 1$ (0.5 ن)

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ (0.5 ن)

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها (0.5 ن)

أسئلة مستقلة (3 نقط)

1) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\frac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{k=n}k^p$

2) ليكن Z و Z' من $\mathbb{C}$. بين أن $|Z+Z'|^2\leq\left(1+|Z|^2\right)\left(1+|Z'|^2\right)$

3) ليكن Z عدد عقدي بحيث $|Z|=1$ بين أن $|1+Z|\geq 1$ أو $|1+Z^2|\geq 1$