03/12/2012

الثانية باك ع ر

مدة الإنجاز: 2h

مادة الرياضيات

الأسدوس الأول

فرض رقم 3

التمرين الأول : (9,5ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى P المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I- 1. حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f . 0,5

2. بين أن الدالة f فردية . 1

3. أحسب النهايات التالية : 1

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x$

أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما .

II- 1. أدرس تغيرات f ، وأعط جدول التغيرات . 1

2. أ- بين أن : $\forall x>0:\ \ln(1+x)-x<0$. 1

ب- بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة Ω أفصولها x_0 بحيث: $1,1<x_0<\sqrt{2}$. (نذكر أن $e<3$) 1

3. أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. 1

4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. 1

III- نضع لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ و $v_n=\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ v_n=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$ ؛ 1

حيث : $x_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

ب- استنتج رتابة المتتالية العدية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 1

ج- بين أن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة . 1

التمرين الثاني: (5,5ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{kx}{n}}$$

1. أحسب $f(0)$. 0,5

2. بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^*\ :\ f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$. 1

3. لكل $x\in\mathbb{R}$ ، نضع : $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}ke^{\frac{kx}{n}}$ 1

أحسب $g(0)$.

4. لتكن h الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$\forall t\in[0,+\infty[\ :\ h(t)=e^{\sqrt{t}}-\sqrt{t}$$

أ- ليكن $x\in]0,+\infty[$. باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين انه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0,x^2[$ بحيث : 1

$$\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{c}}-1}{\sqrt{c}}\right)$$

ب- استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 وأحسب $f'_d(0)$. 1

التمرين الثالث (5 ن)

لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=nx+\ln(x)$

1. بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n في $\mathbb{R}$ وأن $x_n\in]0,1]$ 1

2. أ- بين أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة 1

نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\ell$

ب- بين أن : $\ell\notin]0,1]$. 1

و استنتج أن : $\ell=0$.

3. أ- بين أنه إذا كان $n\geq 3$ ، فإن : $x_n>\dfrac{1}{n}$ 1

ب- ادرس إشارة $x-\ln(x)$ ، واستنتج أن : $x_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 1