

مسألة :
 نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :
 $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$

الجزء I :

- 1- أكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2- أدرس تغيرات f على \mathbb{R}^+ وحد جدول تغيراتها على \mathbb{R}^+
- 3- حدد دالة أولية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$
- 4- استنتج أن : $\forall x \geq 0, 0 \leq xe^{-x} \leq 1$ و $f(x) - f(x) < 0$
- 5- كصف أن : $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{1}{2}u$ $\forall u \in (0, 1)$
- 6- استنتج : $\forall t > 0, 1 - te^{-t} \leq \frac{1}{1+te^{-t}} \leq 1 - \frac{1}{2}te^{-t}$

الجزء II :

نعتبر الدالة F المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :
 $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^{-t}} dt$

- 1- أثبت أن : $\forall x \geq 0, x + f(2x) - f(x) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2}(f(2x) - f(x))$
- 2- استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x)$
- 3- بين أن : $\forall x > 0, F(x) \leq x$
- 4- بين أن F قابلة للتفاضل على \mathbb{R}^+ و أن :

$$F'(x) = \frac{e^{2x} + 2x(e^x - 1)}{(e^{2x} + 2x)(1 + xe^{-x})}, \forall x \geq 0$$

5- استنتج تغيرات F على \mathbb{R}^+

6- أنشئ \mathcal{C}_F

- 7- أ- حدد دالة أولية للدالة $x \mapsto f(x) - f(x)$
- ب- أعط تأطيرا لمساحة الكيزميد للمستوى \mathcal{L} محور بيت \mathcal{C}_F والمستقيعات $x=1$ و $x=0$ و $y=0$

الجزء IV :
 أكتب نهاية المتتالية :
 $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$