2011-2012.

تصحيح الفرض المحروس رقم 3 الأسدس II

التمرين 1:

1) لنحل المعادلة: $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$

$\Delta = 4 = 2^2$

ومنه:

$$z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2}{2} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي:

$$S = \{1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i\}.$$

2) أ. لكل نقطة $M(z)$ من المستوى العقدي نضع $M_1 = R_1(M)$ و $M_2 = R_2(M_1)$ وليكن z_1 و z_2 لحقي النقطتين M_1 و M_2.

$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = ze^{i\frac{\pi}{3}}$

$R_2(M_1) = M_2 \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_1 - b) + b$

وعليه

$R_2 \circ R_1(M) \Leftrightarrow z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(ze^{i\frac{\pi}{3}} - b) + b$

$\Leftrightarrow z_2 = -z - be^{i\frac{2\pi}{3}} + b$

ومنه:

$f(B) = R_2 \circ R_1(B) \Leftrightarrow z_2 = -\cancel{b} - be^{i\frac{2\pi}{3}} + \cancel{b}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i(\pi - \frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = -2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z_2 = a$

وعليه:

$f(B) = A.$

ب) (ن)

$N = R_1(M) \Leftrightarrow n = me^{i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}mi$

(ن ن)

لدينا الكتابة العقدية للتطبيق f

$z' = -z - b(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)$

$z' = -z - (\sqrt{3}i - 1)(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2})$

$z' = -z - (\frac{-3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2})$

$z' = -z + 2\sqrt{3}i$

ومنه:

$f(M) = M' \Leftrightarrow m' = -m + 2\sqrt{3}i$

التمثيل العقدي للتطبيق f من الشكل: $z' = \alpha z + \beta$ حيث: $\alpha = -1 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

إذن فان التطبيق f هو التحاكي الذي مركزه $\Omega(\sqrt{3}i)$ ونسبته -1

ج.

$$\begin{pmatrix} M \text{ و } M' \text{ و } N \\ \text{نقط} \\ \text{مستقيمية} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{m' - m}{n - m} = \frac{-m + 2i\sqrt{3} - m}{\frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}im - m}$$

$$= \frac{2(-m + i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}m(-1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)}$$

$$\frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)} = \frac{4(-\bar{m} + i\sqrt{3})}{\bar{m}(-1 + \sqrt{3}i)}$$

$$\Rightarrow \bar{m}(-m + i\sqrt{3}) = m(-\bar{m} + i\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow -|m|^2 + i\sqrt{3}\bar{m} = -|m|^2 + i\sqrt{3}m$$

$$\Rightarrow m = \bar{m}$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

ومنه: مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M و N و M' مستقيمية هو محور الأفاصيل $(\Delta): y = 0$

التمرين 2:

A-1. لنبين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $E \neq \emptyset$ | $\theta \in E$ من أجل $a = b = 0$ حيث θ المصفوفة المنعدمة

ليكن A و B عنصرين من E.

$$A\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \text{ و } B\begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix} \quad (x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2y & -x-2y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2(b-y) & (a-x)+2(b-y) \end{pmatrix}$$

نضع: $\alpha = a-x$ و $\beta = b-y$

$$A-B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} \in E \qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

إذن: $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

وبما أن: $(M_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية

فإن: $(E,+)$ زمرة تبادلية.

ج- لنبين أن: $(E,+,.)$ فضاء حقيقي

لدينا: $(E,+)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}),+)$

لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),.)$

ليكن $M_{(a,b)}$ مصفوفة من E و $\gamma\in\mathbb{R}$

$$\gamma.M=\gamma\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma a & \gamma b \\ -2\gamma b & \gamma a+2\gamma b \end{pmatrix}$$

نضع: $\gamma a=\alpha$ و $\gamma b=\beta$

$$\gamma M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix}\in E \qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

ومنه E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),.)$

إذن: $(E,+,.)$ فضاء جزئي من $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

وبما أن $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء حقيقي

فإن: $(E,+,.)$ فضاء حقيقي

لنحدد بعده

$M\in E$

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$= aI + bJ.$

ومنه (I,J) أسرة مولدة للفضاء $(E,+,.)$

$$M=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a=0$ و $b=0$

ومنه الأسرة (I,J) حرة.

وعليه (I,J) أساس الفضاء الحقيقي $(E,+,.)$

إذن: $\dim E = 2$

-2

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$=-2I+2J.$

لنستنتج الجداء

$M(a,b)\times M(c,d)$

$M(a,b)\times M(c,d)=(aI+bJ)\times(cI+dJ)$

$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$

$= acI + adJ + bcJ + 2bdJ - 2bdI$

$= (ac-2bd)I + (ad+bc+2bd)J.$

3- أ- لنبين أن f تقابل.

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $M\in E$.

نضع $z=x+yi$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(M(a,b))=z \Rightarrow (a+b)+bi=x+yi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=x \\ b=y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=x-y \\ b=y. \end{cases}$$

ومنه

$(\forall z\in\mathbb{C})\ (\exists!\, M(a,b)\in E) \,/\, f(M(a,b))=z$

إذن f تقابل من E نحو $\mathbb{C}$.

التقابل العكسي

$f^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow E$

$z=x+yi \longrightarrow M(x-y,y)$

ب- لنبين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

$M(a,b)$ و $M(c,d)$ عنصرين من E.

$f(M(a,b)\times M(c,d)) = f(M(ac-2bd,\ ad+bc+2bd))$

$= (ac+ad+bc)+(ad+bc+2bd)i$

ومن جهة أخرى:

$$f(M(a,b)) \times f(M(c,d)) = ((a+b)+bi)((c+d)+di)$$

$$= ac+ad+bc+bd+(a+b)id+(c+d)bi - bd$$

$$= (ac+ad+bc) + (ad+bc+2bd)i$$

$$= f(M(a,b) \times M(c,d))$$

ومنه: f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج. لنستنتج بنية $(E,+,\times)$

لدينا:

$(E,+)$ زمرة تبادلية.

f تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

و $f^{-1}(\mathbb{C}^*) = E^*$

لدينا $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

إذن: $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

و من خلال السؤال 2 E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا: $\times$ توزيعي على $+$ في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ومنه $\times$ توزيعي على $+$ في E.

نستنتج أن: $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

د. لنحدد في E حلول المعادلة.

$M^3 - I + J = \theta$ حيث المصفوفة θ المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

$$M^3 - I + J = \theta \Rightarrow f(M^3) = f(I-J)$$

$$\Rightarrow (f(M))^3 = -i$$

$$\Rightarrow ((a+b)+bi)^3 = -i$$

نضع

$z = x+yi \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$z^3 = -i \Rightarrow z^3 - i^3 = 0$$

$$\Rightarrow (z+i)(z^2 + zi - 1) = 0$$

$$\Rightarrow z = -i \text{ أو } z^2 + zi - 1 = 0$$

$$\Delta = 3 = (\sqrt{3})^2$$

$$z = \frac{-i-\sqrt{3}}{2} \text{ أو } z = \frac{-i+\sqrt{3}}{2}$$

لدينا: $z = (a+b)+bi$

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

و منه حلول المعادلة هي:

$$S = \left\{ M(1,-1) ; M\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{1}{2}\right) ; M\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

التمرين ③.

الجزء I:

$f(x) = \frac{x-1}{x\ln x} \quad x \neq 1$ و $f(1) = 1$

1. لنبين أن الدالة متصلة في D.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}} \right) \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1) \left(\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \right)$$

ومنه f متصلة في 1

و لدينا

$x \mapsto x\ln x$ متصلة في $D - \{1\}$

و غير منعدمة على هذا المجال

$x \mapsto x-1$ متصلة على $D - \{1\}$

ومنه

$x \overset{f}{\mapsto} \frac{x-1}{x\ln x}$ متصلة على $D - \{1\}$.

ومتصلة في 1

ومنه: الدالة f متصلة على D.

2. أ. بين

$$(\forall x \in D - \{1\}) \quad f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x\ln x - (\ln x + 1)(x-1)}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} \quad (\forall x \in D - \{1\})$$

ب. لنبين أن الدالة f تناقصية على D.

نضع

$$g(x) = \ln x - x + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ومنه: $\forall x\in D-\{1\},\ g(x)<0$

ومنه: $f'(x)<0 \quad \forall x\in D-\{1\}$

وعليه f متناقصة على D.

الجزء (2):

1) أ- $\forall x\in]0,1[$

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt=\Big[\ln|\ln(t)|\Big]_x^{x^2}$$
$$=\ln|\ln(x^2)|-\ln|\ln(x)|$$
$$=\ln\left(\left|\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right|\right)$$
$$=\ln(2)$$

وعليه:

$$\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt=\ln(2) \qquad (\forall x\in]0,1[)$$

ب- لنبين أن: $(\forall x\in]0,1[)$

$$(x^2-1)\ln(2)\le F(x)\le (x-1)\ln(2)$$

لدينا: $x^2<x \qquad \forall x\in]0,1[$

ومنه: $x^2\le t\le x \Rightarrow x^2-1\le t-1\le x-1$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)}{t\ln(t)}\le\frac{t-1}{t\ln(t)}\le\frac{x^2-1}{t\ln(t)}$$

$(x^2<x) \quad \forall t\in]0,1[\quad \left(\frac{1}{t\ln(t)}<0\right)$

$$(x^2-1)\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt\le F(x)\le(x-1)\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt$$

$$(x^2-1)\ln(2)\le F(x)\le(x-1)\ln(2) \qquad (\forall x\in]0,1[)$$

ج- لندرس اتصال الدالة F على يمين 0.

$$\lim_{x\to0^+}(x^2-1)\ln(2)=\lim_{x\to0^+}(x-1)\ln(2)=-\ln(2)$$

ومنه:

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=-\ln(2)=F(0)$$

ومنه: F متصلة على يمين 0.

لندرس اتصال الدالة على يسار 1.

$$\lim_{x\to1^-}(x^2-1)\ln(2)=\lim_{x\to1^-}(x-1)\ln(2)=0$$

وعليه:

$$\lim_{x\to1^-}F(x)=0=F(1)$$

ومنه: F متصلة على يسار 1

2) أ- لنبين أن: $(\forall x\in]0,1[)$

$$\frac{x^2-x}{2\ln x}\le F(x)+\ln(2)\le\frac{x^2-x}{\ln(x)} \quad \forall x\in]0,1[$$

$$F(x)+\ln(2)=\int_x^{x^2}\frac{t-1}{t\ln(t)}dt+\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}dt$$
$$=\int_x^{x^2}\frac{t}{t\ln(t)}dt$$
$$=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt$$

لدينا: $x^2<x \quad (\forall x\in]0,1[)$

$$x^2\le t\le x \Rightarrow 2\ln(x)\le\ln(t)\le\ln(x)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(x)}\le\frac{1}{\ln(t)}\le\frac{1}{2\ln(x)}$$
$$\Rightarrow\int_x^{x^2}\frac{1}{2\ln(x)}dt\le\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt\le\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(x)}dt$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2\ln(x)}[t]_x^{x^2}\le F(x)+\ln(2)\le\frac{1}{\ln(x)}[t]_x^{x^2}$$
$$\Rightarrow\frac{x^2-x}{2\ln(x)}\le F(x)+\ln(2)\le\frac{x^2-x}{\ln(x)} \qquad (\forall x\in]0,1[)$$

ب- لندرس قابلية اشتقاق F على يمين 0.

$$\frac{F(x)-F(0)}{x}=\frac{F(x)+\ln(2)}{x} \qquad \forall x\in]0,1[$$

$$\frac{x-1}{2\ln(x)}\le\frac{F(x)+\ln(2)}{x}\le\frac{x-1}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{2\ln(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{\ln(x)}=0$$

وعليه:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)+\ln(2)}{x}=0\in\mathbb{R}$$

إذن F قابلة للاشتقاق على يمين 0.

3) أ- لدينا $t\to f(t)$ متصلة على $[x,x^2]$ $(\forall x>1)$

وعليه: $\exists c\in[x,x^2]\ /\ f(c)=\frac{1}{x^2-x}F(x)$

أي: $\exists c\in[x,x^2]\ /\ F(x)=(x^2-x)f(c)$

$(\forall x>1)$

ب- $x\le c\le x^2 \Rightarrow f(x^2)\le f(c)\le f(x)$

(f متناقصة على $[x,x^2]$ ، $(\forall x>1)$) $x^2>x$

وعليه:

$$(x^2-x)f(x^2)\le(x^2-x)f(c)\le(x^2-x)f(x)$$

$(x^2-x)f(x^2) \leq F(x) \leq (x^2-x)f(x)$

$\lim_{x\to1^+}(x^2-x)f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2-x)f(x^2)=0$

ومنه:

$\lim_{x\to1^+}F(x)=0=F(1)$

← إذن F متصلة على يمين النقطة 1

$\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\frac{F(x)}{x-1}$

$xf(x^2)\leq \frac{F(x)}{x-1}\leq xf(x)$

$\lim_{x\to1^+}xf(x^2)=\lim_{x\to1^+}xf(x)=1$

وعليه: $\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=1\in\mathbb{R}$

← إذن F قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1

ج- لنبين أن: $F(x)\geq \ln x$.

لدينا:

$F(x)-\ln(x)=\int_x^{x^2}\frac{t-1}{t\ln(t)}dt-\int_x^{x^2}\frac{1}{t}dt$

$=\int_x^{x^2}\frac{t-1-\ln(t)}{t\ln(t)}dt$

$=\int_x^{x^2}\frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt$

لدينا (من خلال س.2.ب ج)

$-(\ln(t)-t+1)=-g(t)\geq0$ ؛ $\forall t\in]1,+\infty[$

$t\ln(t)>0$ و ومنه

$\int_x^{x^2}\frac{-(\ln(t)-t+1)}{t\ln(t)}dt\geq0$

أي:

$F(x)\geq\ln(x) \quad \forall x\in[1,+\infty[$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

حسب مصاديق التقارب

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

4.ج) لنبين أن F قابلة للاشتقاق على كل من]0,1[و]1,+∞[

$t\mapsto f(t)$ متصلة على كل من]0,1[و]1,+∞[

ومنه فهي تقبل دالة أصلية G بحيث:

$F(x)=G(x^2)-G(x)$.

$x\xrightarrow{\varphi} x^2$ قابلة للاشتقاق على]0,1[و]1,+∞[

$\varphi(]0,1[)\subset]0,1[$

$\varphi(]1,+\infty[)\subset]1,+\infty[$

$x\mapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ومنه: $x\xrightarrow{F} G\circ\varphi(x)$ قابلة للاشتقاق على كل من]0,1[و]1,+∞[.

$F'(x)=2xG'(x^2)-G'(x)$

$=2xf(x^2)-f(x)$

$=2x\left(\frac{x^2-1}{2x^2\ln(x)}\right)-\left(\frac{x-1}{x\ln(x)}\right)$

$=\frac{x^2-x}{x\ln(x)}$

$=\frac{x-1}{\ln(x)}$

$\frac{x-1}{\ln(x)}>0 \quad \forall x\in(]0,1[\cup]1,+\infty[)$

وعليه F تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

جدول التغيرات.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$F(x)$	$-\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$

من إنجاز التلميذة: أمينة مامو

تحت إشراف الأستاذ:

الحسناوي بوشعيب.