| السنة 2 بكالوريا علوم رياضية | الأعداد العقدية- الحساب التكاملي<br>حلول مقترحة | |
|---|---|---|

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح - مدة الانجاز ساعتان

**تمرين 1 :**

**1**

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x \left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$
$$I(x)=\left[e^t\cos(2t)+2e^t\sin(2t)\right]_0^x-2\left(2\int_0^x e^t\cos(2x)\,dt\right)=\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x-4\,I(x)$$

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x \left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$

بالتالي :

$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$
$$I(x)=\frac{1}{5}\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x=\frac{\left(\cos(2x)+2\sin(2x)\right)e^x-1}{5}$$

**2**

على المجال $[0;®]$ الدالة $g:x\to e^x\cos(2x)$ قابلة للاشتقاق على $IR$

و لدينا : $\forall x\in IR\ g'(x)=e^x\left(\cos(2x)-2\sin(2x)\right)$ ، ولكون الدالة $g'$ متصلة على $[0;®]$ فهي محدودة

عليه، بالتالي :

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k®}{n}}\cos\left(\frac{2k®}{n}\right)=\frac{1}{®}\,\frac{®}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k®}{n}}\cos\left(\frac{2k®}{n}\right)=\frac{1}{®}\,\frac{®-0}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(0+k\frac{®-0}{n}\right)$$
$$v_n=\frac{1}{®}\int_0^{®}g(t)dt=\frac{I(®)}{®}=\frac{e^{®}-1}{5®}$$

**تمرين 2 :**

$$(E):\ z^2+2\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)z-4\left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=0$$

**الجزء الأول**

**1** لدينا :
$$\Delta=4\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)^2+16\left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=4\left(1-2\boldsymbol{i}\sqrt{3}-3+4+4\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=4\left(2+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)=16\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)=16\,e^{\frac{®}{3}\boldsymbol{i}}$$

**2**

أحد الجذرين المربعين لـ $\Delta$ هو : $¢=4\,e^{\frac{®}{6}\boldsymbol{i}}=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)$

منه :
$$z_1=\frac{-2\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)}{2}=-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}+\sqrt{3}+\boldsymbol{i}=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}$$

و :
$$z_2=\frac{-2\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)}{2}=-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}=-\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}-1\right)\boldsymbol{i}$$

**3**

لدينا :
$$z_1^2=\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}\right)^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}-\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$
$$z_1^2=4-2\sqrt{3}+4\boldsymbol{i}-\left(4+2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}+4\boldsymbol{i}=4\left(-\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)$$

و:
$$\boldsymbol{i}\,z_1=\boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)\boldsymbol{i}\right)=\boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)=z_2$$

**4**

$$z_1^2=4\left(-\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)=8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)=\left[8,\frac{5®}{6}\right]$$

5

بما أن : $z_1^2=\left[8,\frac{5\pi}{6}\right]$ فإن : $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\pi}{12}+\pi\right]$

أي : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{17\pi}{12}\right]$

ولكن وبما أن $\operatorname{Re}(z_1)>0$ و $\operatorname{Re}\left(\left[2\sqrt{2},\frac{17\pi}{12}\right]\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)<0$ فإن : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$

منه : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]=\left[1\times 2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{11\pi}{12}\right]$

## الجزء الثاني

$A(z_1)$ و $B(z_2)$ ، $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران $R$

1

الكتابة العقدية للدوران $R$ هي $z'=\boldsymbol{i}\,z$

بما أن : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ فإن : $B=R(A)$

2

أ)

لدينا لكل $z\neq z_2$ و $z\neq z_1$ : $z'=\boldsymbol{i}\,z$ و $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ منه : $\frac{z'-z_2}{z-z_2}=\frac{\boldsymbol{i}\,z-\boldsymbol{i}\,z_1}{z-z_2}=\boldsymbol{i}\,\frac{z-z_1}{z-z_2}$

منه : $\arg\left(\frac{z'-z_2}{z-z_2}\right)\equiv\arg(\boldsymbol{i})+\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)[2\pi]$ أي : $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$

ب)

إذا كانت $M=B$ أو $M=A$ فالنقط $M$ و $B$ و $M'$ مستقيمية.

إذا كانت $M\neq B$ أو $M\neq A$ فإن :

$$M\in(T)\iff\left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv 0[2\pi]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\pi\,[2\pi]\right)$$

$$M\in(T)\iff\left(\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv 0[2\pi]\ ou\ \frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\pi\,[2\pi]\right)$$

$$M\in(T)\iff\left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

$$M\in(T)\iff(BM)\perp(AM)$$

خلاصة : $(T)$ هي الدائرة ذات القطر $[AB]$

تمرين 3 :

## الجزء الأول

$$\forall x\in IR^*\qquad g(x)=1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

1

الدالة $g$ متصلة و قابلة للاشتقاق على $IR^*$ ، ولدينا :

$$\forall x\in IR^*\ \ g'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}+1\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{2x+1}{-x}\right)$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | - | 0 | + | \|\| | + | |
| $-x$ | | + | | + | 0 | - | |
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | \|\| | - | |
| $g(x)$ | | ↘ | $\frac{e^2-1}{e^2}$ | ↗ | \|\| | ↘ | |

ليس مطلوبا إدراج النهايات في المحدات في جدول التغيرات ما دام لم يرد حسابها في أي سؤال سابق.

2

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1+1=2$ بما أن الدالة $g$ تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ فإن : $\forall x\in\,]0;+\infty[\ \ g(x)>2$

| | | |
|---|---|---|
| | ولدينا : $\forall x \in ]-\infty;0[ \ \ g(x) > \frac{e^2-1}{e^2}$ ، بالتالي: $\forall x \in IR^* \ \ g(x) > 0$ | |
| | **الجزء الثاني** $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$ | |
| 1 | لدينا : $\left(\frac{0+}{+\infty}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ و $\left(\frac{0+}{1+0}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$<br>بالتالي : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ، ما يعني أن $f$ متصلة في الصفر | |
| 2 | بما أن الدوال : $x \mapsto x$ و $x \mapsto 1+e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على $IR^*$ وحيث أن : $\forall x \in IR^* \ 1+e^{\frac{1}{x}} \neq 0$<br>فإن $f$ قابلة للاشتقاق على $IR^*$ و لدينا :<br>$$\forall x \in IR^* \quad f'(x) = \left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)' = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} - x\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$ | |
| 3 | سبق و برهنا أن $\forall x \in IR^* \ \ g(x) > 0$ منه : $\forall x \in IR^* \ \ f'(x) > 0$ ولكون : $f'(0) = 0$<br>فإن : $\forall x \in IR \ \ f'(x) \geq 0$ و $x = 0 \iff f'(x) = 0$ (أي أن المشتقة تنعدم في عدد معدود من الحلول)<br>بالتالي $f$ تزايدية قطعا على $IR$ | |
| | **الجزء الثالث** $$\forall x \in [1;+\infty[ \quad F(x) = \int_1^{x^2} f(t)dt$$ | |
| 1 | ليكن $x \in ]1;+\infty[$ ، بما أن الدالة $t \mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$<br>فإن : $\left(\exists c_x \in ]1;x^2[\right) \ f(c_x) = \frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} f(t)dt$ أي : $\left(\exists c_x \in ]1;x^2[\right) \ f(c_x) = \frac{1}{x^2-1}F(x)$<br>بالتالي : $(\forall x > 1) \ \left(\exists c_x \in ]1;x^2[\right) \ f(c_x) = \frac{1}{x^2-1}F(x)$ | |
| 2 | ليكن $x \in ]1;+\infty[$ إذن : $\left(\exists c_x \in ]1;x^2[\right) \ f(c_x) = \frac{1}{x^2-1}F(x)$<br>بما أن $f$ تزايدية قطعا على $IR$ فإن :<br>$$1 < c_x < x^2 \Rightarrow f(1) < f(c_x) < f(x^2) \Rightarrow f(1) < \frac{1}{x^2-1}F(x) < f(x^2) \Rightarrow (x^2-1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2-1)f(x^2)$$<br>بالنسبة لـ $x = 1$ المتفاوتة صحيحة<br>بالتالي : لكل $x$ من $[1;+\infty[$ : $(x^2-1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2-1)f(x^2)$ | |
| 3 | لدينا : $(x+1)f(1) \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq (x+1)f(x^2)$ $\forall x > 1$ ( $F(1) = 0$ )<br>وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} (x+1)f(1) = 2f(1)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} (x+1)f(x^2) = 2f(1)$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = 2f(1)$<br>بالتالي $F$ قابلة للاشتقاق يمين 1 ولدينا : $F'_d(1) = 2f(1) = \frac{2}{1+e}$ | |
| 4 | بما أن $t \mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$ فإن $F(x)$ معرفة لكل $x \geq 1$ و قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$<br>وبوضع : $\forall x \in [1;+\infty[ \quad U(x) = \int_1^x f(t)dt$ فإن : $\forall x \in [1;+\infty[ \quad F(x) = U(x^2)$ | |

| | | |
|---|---|---|
| | منه : $\forall x \in ]1;+\infty[\quad F'(x)=2xU'(x^2)=2x\,f(x^2)=\dfrac{2x^3}{1+e^{\frac{1}{x^2}}}$ | |
| | **الجزء الرابع**<br>$\forall n \in IN^* \quad u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt$ | |
| 1 | لدينا : $\forall n \in IN^*\ u_{n+1}-u_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}\dfrac{f(t)}{t^3}dt+\int_{1}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt$<br>وبما أن الدالة $t\mapsto\dfrac{f(t)}{t^3}$ موجبة قطعا على $\left[\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right]$ فإن : $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\dfrac{f(t)}{t^3}dt>0$<br>بالتالي $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية قطعا | |
| 2 | نضع : $u=\dfrac{1}{t}$ منه : $t=\dfrac{1}{u}$ منه : $dt=\dfrac{-1}{u^2}du$ و $\begin{cases} t=\dfrac{1}{n}\Rightarrow u=n \\ t=1\Rightarrow u=1\end{cases}$<br>منه : $u_n=\int_n^1\dfrac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^3}}\left(\dfrac{-1}{u^2}\right)du=-\int_n^1 u\,f\left(\dfrac{1}{u}\right)du=-\int_n^1 u\dfrac{\frac{1}{u}}{1+e^u}\,du=\int_n^1\dfrac{-1}{1+e^u}\,du=\int_n^1\dfrac{-1-e^u+e^u}{1+e^u}\,du$<br>$u_n=\int_n^1\left(-1+\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du=\int_1^n\left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du$ | |
| 3 | $u_n=\int_1^n\left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du=\left[u-\ln(1+e^u)\right]_1^n=n-\ln(1+e^n)-1+\ln(2)=\ln(2)-1-\ln\left(\dfrac{1+e^n}{e^n}\right)$<br>بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ln(2)-1-\ln(1)=\ln(2)-1$ | |