

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0,1]$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{2} \arctan(1-x)$

1) أ- أدرس منحى تغيرات الدالة f وبين أن $f(I) \subseteq I$

ب- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α

ج- بين أن $(\forall (x,y) \in I^2) |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq U_n \leq 1$

ب- نضع $V_n = U_{2n}$ و $W_n = U_{2n+1}$ لكل عدد طبيعي n

1ب) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) V_n \leq \alpha \leq W_n$

2ب) أدرس رتابة كل من $(V_n)_n$ و $(W_n)_n$

3ب) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(W_n - V_n)$

4ب) بين أن $(V_n)_n$ و $(W_n)_n$ متحاذيتين و حدد نهايتهما المشتركة

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

ب- استنتج قيمة كل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث :

1) بين أن $\sum_{k=1}^{k=n} k i^{k-1} = \frac{1}{2}(i - n i^n - (n+1) i^{n+1})$

2) استنتج قيمة كل من : $S = \sum_{k=1}^{k=m} (-1)^k (2k)$

و $S' = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (2k+1)$

التمرين الثالث :

نعتبر العدد العقدي $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

1) أ- حدد الشكل المثلثي للعدد z_0

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) z_0^n + (\bar{z}_0)^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

2) نضع $Z = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$

أ- بين أن $\bar{Z} = \sqrt{2} z_0 e^{i\frac{\pi}{4}}$

ثم حدد الشكل المثلثي للعدد Z

التمرين الرابع :

ليكن a عدد من $]0,1[$ و n عدد طبيعي غير منعدم. نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} x^k \right) - a$$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n وأن $0 < x_n < 1$

2) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (x-1)f_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$

3) أ- بين أن $(\forall x \in]0,1[) f_{n+1}(x) > f_n(x)$

ب- استنتج أن المتتالية $(x_n)_n$ تناقصية و أنها متقاربة

ج- بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$ و حدد نهاية المتتالية $(x_n)_n$ بدلالة a