فرض رقم 3

15-2016

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) بين ان $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ و أدرس منحى تغيرات الدالة f

3) حل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة $f(x)=x$ و المتراجحة $f(x)>x$

4) بين ان f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو I يتم تحديده ثم أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من I

5) أرسم في نفس المعلم المنحنيين (C_f) و $(C'_{f^{-1}})$

الجزء الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\le U_n<\sqrt{3}$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها

3) نضع $V_n=\frac{U_n^2}{3-U_n^2}$ لكل عدد طبيعي n

أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية

ب) حد الحد العام U_n بدلالة n

الجزء الثالث :

نضع $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}U_k^2$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) أ) بين أن $n\le S_n\le 3n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب) استنتج النهايتين $\lim_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$

2) نضع $W_n=\frac{S_n}{n}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

أ) بين أن $nS_{n+1}-(n+1)S_n=nU_n^2-S_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب) استنتج أن المتتالية $(W_n)_n$ تزايدية و أنها متقاربة . نرمز لنهايتها بالعدد l

3) ليكن n و p عددين من $\mathbb{N}^*$ مع $n>p$

أ) بين ان $(n-p)U_p^2\le S_n\le nU_{n-1}^2$

ب) استنتج أن $\frac{n-p}{n}U_p^2\le W_n\le U_{n-1}^2$

ج) بين أن $U_p^2\le l\le 3$ $(\forall p\in\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج قيمة l

التمرين الثاني

ليكن t عددا من $\mathbb{R}^{+*}$ و n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x^n-t(1-x)$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a_n و أن $0<a_n<1$

2) أ- بين أن $f_{n+1}(a_n)=-t(1-a_n)^2$ و استنتج أن المتتالية $(a_n)_n$ متقاربة

ب- حدد تأطيرا للعدد a نهاية المتتالية $(a_n)_n$

3) بين بالخلف أن $a=1$