	فرض محروس رقم	الموسم الدراسي	2013 - 14
	في مادة الرياضيات	مدة الإنجاز	ساعتان
		المستوى الدراسي	3 ع إ

مسألة (10 ن) :

- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=x^2+\ln\frac{x}{2}$.

1)- ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$.

2)-أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]0,\alpha[$ و $]\alpha,+\infty[$.

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x^2-2\ln x}, x>0$ و $f(0)=0$.

1)-أ- بين أن الدالة f متصلة في الصفر على اليمين.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في الصفر على اليمين ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

ج- أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

2)-أ- بين أن: $\forall x>0, f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{x}(f(x))^2$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f، و استنتج أن $\forall x\in[0,+\infty[, 0\le f(x)\le 1$.

3)- أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

نعتبر الدالة F المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt, x>0$ و $F(0)=0$.

1)- بين أن $\forall x>0; 0\le F(x)\le x$، و استنتج أن F متصلة في الصفر على اليمين.

2)-أ- بين أن $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, \frac{x}{x^2-2\ln x}\le F(x)\le\frac{x}{4x^2-2\ln 2x}$.

ب- استنتج أن F قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و أن $F'_d(0)=0$.

3)-أ- بين أن $\forall x\ge 1, \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}\le F(x)\le\frac{x}{x^2-2\ln x}$.

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$.

4)-أ- بين أن $\forall x>0, F'(x)=-2g(x)f(x)f(2x)$.

ب-ضع جدول تغيرات الدالة F.

التمرين 1 : 6 ن

- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 21u-52v=1$

1)- باستعمال خوارزمية إقليدس، حدد حل خاص للمعادلة (E).

2)- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

3)- نعتبر في $\mathbb{N}$ المعادلة: $(F): x^{21}\equiv 2\ [53]$.

4)- ليكن x حلا للمعادلة (F).

أ- بين أن 53 أولي و أن x و 53 أوليان فيما بينهما .

ب- بين أن $x^{52}\equiv 1\ [53]$ و أن $x\equiv 2^5\ [53]$

5)- بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x\equiv 2^5\ [53]$ فإن x حل للمعادلة (F).

6)- بين أن حلول المعادلة (F) هي الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على الشكل $-21+53k$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

التمرين 2 : 4 ن

نعتبر في $\mathbb{Z}^3$ المعادلة : $(E): x^2+y^2=pz^2$

حيث p عدد صحيح طبيعي أولي يحقق: $p\equiv 3[4]$

1. أ- بين أن المعادلة : $x^2+1\equiv 0[p]$ لا تقبل أي حل في $\mathbb{Z}$.

ب- استنتج أن: $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2);\ (p/(x^2+y^2) \Leftrightarrow p/x \text{ و } p/y)$

2. أ- بين ان المعادلة : $x^2+y^2=pz^2$ مع $x\wedge y\wedge z=1$ لا تقبل أي حل في $(\mathbb{N}^*)^3$.

ب- بوضع $x\wedge y\wedge z=d$ حل في $(\mathbb{N}^*)^3$ المعادلة (E).

ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^3$.