

التمرين الأول: (5, 3 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير مبرمجة

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا.

لكل x من \mathbb{R} ، نرسم $A(x)$ للمصفوفة المربعة التالية: $A(x) = \begin{pmatrix} a^x & -xa^x \\ 0 & a^x \end{pmatrix}$ و لتكن المجموعة:

$$E = \{A(x) / x \in \mathbb{R}\}$$

أ- بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ وأن \times تبادلي في E .

0.5

ب- بين أن التطبيق: $f: \mathbb{R} \rightarrow E$
 $x \mapsto A(x)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) .

0.5

ج- استنتج بنية (E, \times) .

0.5

2) نعتبر المجموعة التالية: $F = \{A(n) / n \in \mathbb{Z}\}$

بين أن (F, \times) زمرة جزئية للزمرة (E, \times) .

0.5

3) لكل n من \mathbb{N} و لكل x من \mathbb{R} نضع: $A^0(x) = I$ و $A^{n+1}(x) = A^n(x) \times A(x)$

نرمز $A^{-n}(x)$ لمقلوب المصفوفة $A^n(x)$ في (E, \times) .

أ- حدد: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{Z}) A^p(x)$

0.5

ب- ليكن (α, β) من \mathbb{Z}^2 . نعتبر المجموعة: $G = \{A^p(\alpha) \times A^q(\beta) / (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$

بين أن (G, \times) زمرة تبادلية.

0.5

ج- بين أن: $\alpha \wedge \beta = 1 \Leftrightarrow F = G$

0.5

التمرين الثاني (3 نقط)

الجزء I

ليكن a عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث: $a \wedge 10 = 1$ ($a \wedge 10$ يرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و 10)

1) أ- بين أن a عدد فردي و استنتج أن: $a^8 \equiv 1 [2]$.

0,25 ن

ب- بين أن a غير قابل للقسمة على 5 و أن $a^4 \equiv 1 [5]$.

0,25 ن

ج- استنتج أن $a^8 \equiv 1 [10]$.

0,25 ن

2) أ- بين أن: $\forall k \in \mathbb{N}$

0,75 ن

$$a^{8 \times 10^k} \equiv 1 [10^{k+1}] \text{ و استنتج أن: } a^{800000001} \equiv a [10^9]$$

ب- باستعمال نتيجة السؤال السابق، أثبت وجود عدد صحيح طبيعي x بحيث الكتابة العشرية للعدد x^3 تنتهي

0,5 ن

الجزء II

بالعدد 123456789

نضع $E = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$ ونعبر عن التطبيق f من E نحو E

1 ن

والذي يربط كل عنصر n من E بباقى القسمة $27n+4$ على 31

بين أن f تقابل من E نحو E و حدد f^{-1}

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ و $g(x) = \ln(1+x)$

نعتبر (\mathcal{E}) المنطقي الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, i, j) .

- الجزء I**
- احسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: 0,25
 - تحقق من أن : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + \ln(1+e^x)$: 0,25
 - استنتج أن المنطقي (\mathcal{E}) يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ينبغي تحديده. 0,25
 - أدرس الوضع النسبي للمنطقي (\mathcal{E}) والمستقيم (Δ) . 0,25
 - ضع جدول تغيرات الدالة f . 0,50
 - أدرس تقعر المنطقي (\mathcal{E}) . 0,50
 - أنتهي (\mathcal{E}) و المستقيم (Δ) والمماس (T) للمنطقي (\mathcal{E}) في النقطة ذات الأضلاع 0. 0,50
 - بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال I ينبغي تحديده ، ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x \in I$: 0,50

الجزء II 1. بين أن : $\forall t \geq 0, t - \frac{t^2}{2} \leq g(t) \leq t$: 0,50

ثم استنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$: 0,25

2. لكل n من \mathbb{N}^* ، نضع : $a_n = \int_0^n f(x) dx$

أ- بين أن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة. نضع : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. أعط تأكيدا هندسيا للعدد a . : 0,50

ب- بين أن : $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$: 0,50

3. لكل n من \mathbb{N}^* ، نضع : $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$: 0,75

احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

الجزء III لكل $x \in]-1, 1[$ و لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع :

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x + \frac{(-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

1. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(x) = g_n(x) + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$: 0,75

2. نضع : $R_n(x) = g(x) - g_n(x)$

بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ ، ثم استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x)$: 0,75

3. نضع : $x = -\frac{1}{2}$. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث : 0,75

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| g\left(-\frac{1}{2}\right) - g_n\left(-\frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-2}$$

4. ليكن $p \in \mathbb{N}^*$ وليكن $x \in \left[\frac{1}{p}, p\right]$

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(e^{-x}) - \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq f(x) \leq g_n(e^{-x}) + \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$: 0,75

ب- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = 1 + \frac{(-1)}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$: 0,75

بين أن : $u_n - \frac{1}{(n+1)^2} \leq a \leq u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$

بين أن : $a = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{p}}^p f(x) dx$ ، ثم استنتج أن : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: 0,75

التمرين الرابع (3.5 نقاط)

I- نعتبر في C الحدودية: $P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + (-1+9i)z - 2(1+5i)$.

(1) حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-7-24i$. 0.25

(2) حل في C المعادلة: $P(z) = 0$. (يمكنك حساب $P(2)$) 0.75

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \bar{u}, \bar{v}) ، نعتبر A و

B و C التي الحاقها على التوالي 2 و $1-i$ و $-2+3i$ وليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\overline{CA}, \overline{CB})$

و r الدوران الذي مركزه C و زاويته θ

(1) نعتبر المجموعة التالية: $(\Delta) = \{M(z) \in (P) \mid |2-z| = |z-1-i|\}$.

أ- تحقق أن $C \in (\Delta)$. 0.25

ب- حدد طبيعة المجموعة (Δ) و استنتج صورة النقطة A بالدوران r . 0.5

(2) أ- تحقق أن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i \left(\frac{2-i}{2+i} \right)^2$ ثم استنتج أن: $4 \arg(2-i) + \frac{\pi}{2} \equiv \theta [2\pi]$. 0.5

ب- نضع: $\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. بين أن $\arg(2-i) \equiv -\beta [2\pi]$. 0.5

ج- استنتج أن: $\theta \equiv \frac{\pi}{2} - 4 \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. 0.25