2016-2015	فرض رقم 3	

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f\left(x\right) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x}$

الجزء (1)

1) أ) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$

ب) بين أن المستقيم $y = 2x + 4$ $\left(\Delta\right)$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $a = 0$ و على يسار النقطة $b = -4$

3) أ) أحسب المشتقة $f'\left(x\right)$

ب) بين أن f تزايدية على $\left]-\infty,-4\right]$ و تناقصية على المجال $\left[0,+\infty\right[$

4) أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$

الجزء (2)

1) أ- بين أن $x \le \sqrt{x^2 + 4x} \le x + 2$ $\left(\forall x > 0\right)$

ب- بين أن $\dfrac{2}{x+2} \ge \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}$ $\left(\forall x > 0\right)$

ج- استنتج أن $\dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} \le f\left(x\right) \le \dfrac{2}{x}$ $\left(\forall x > 0\right)$

2) نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\dfrac{n^2}{k}\right)$

أ- بين أن $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^2 \le n^3$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ب- بين أن $1 - \dfrac{3}{n} \le U_n \le 1 + \dfrac{1}{n}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ج- استنتج أن $\left(U_n\right)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sqrt{n + \sqrt{\left(n-1\right) + \ldots\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$

1) أحسب U_1 ; U_2

2) حدد نهاية المتتالية $\left(U_n\right)_{n>0}$

3) أ- عبر عن U_{n+1} بدلالة U_n و بين أن $U_n \le n$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ب- اثبت أن $U_n \le \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$ $\left(\forall n > 2\right)$

ج- أستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{U_n}{\sqrt{n}} = 1$