الثانية ع ر | فرض رقم 3 | 2015-14

التمرين الأول :

ليكن θ من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ حدد حسب قيم العدد θ الشكل المثلثي لكل من العددين : $Z_1=\frac{1}{1+i\tan\theta}$ و $Z_2=i+\tan\theta$

التمرين الثاني :

نضع $f(z)=z^3+(1-i)z^2+2(1+i)z-8i$

1) بين أن المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده

2) أ- حدد الأعداد العقدية a ، b ، c بحيث :

$$f(z)=(z+2i)(az^2+bz+c)$$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=0$

3) نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط $A(1+i)$; $B(-2i)$; $C(-2+2i)$

أحسب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين الثالث :

1) نضع $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ أكتب j^2 ; j^3 و $1+j$ على الشكل الأسي

2) لتكن a ; b ; c أعداد عقدية بحيث $a+bj+cj^2=0$

بين أن $|a-b|=|b-c|=|c-a|$

3) حدد الرمز الأسي لكل من $(1+j)^2$

4) نضع $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}(1+j)^k$ لكل عدد طبيعي n

بين أن $S_n=e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i(n-1)\frac{\pi}{3}}$ ثم حدد قيم n كي يكون $S_n=0$

التمرين الرابع :

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{3^k}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

1) أ- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

ب- بين أن $2^k\geq k$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة

2) أ- بين أن $U_n=\frac{1}{3}\left(U_n-\frac{n}{3^n}\right)+\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3^n}=0$ و استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{3}{4}$

التمرين الخامس :

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة العددية F_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F_n(x)=x^n+9x^2-4$

1) أ- بين أن المعادلة $F_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا U_n

ب- حدد U_1 ; U_2

ج- بين أن $0<U_n<\frac{2}{3}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

2) أ- بين أن $F_{n+1}(x)<F_n(x)$ $(\forall x\in]0,1[)$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

3) أحسب $\lim_{n\to+\infty}U_n^n$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty}U_n$