

التمرين 1 :

نقبل أن : $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^{*2} : a \wedge b = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 = 1$

نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{p=1}^n p^3$

لنحدد $S_n \wedge S_{n+1}$ ، لكل n من \mathbb{N}^* .

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

2. نفترض أن n زوجي : $\exists k \in \mathbb{N}^* , n = 2k$
أ- بين أن لكل $k \in \mathbb{N}^*$ ، لدينا :

$$S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2 \left[k^2 \wedge (k+1)^2 \right]$$

ب- أحسب : $k \wedge (k+1)$ لكل $k \in \mathbb{N}^*$

ج- أحسب $S_{2k} \wedge S_{2k+1}$ ، لكل $k \in \mathbb{N}^*$

3. نفترض أن n فردي : $\exists k \in \mathbb{N} , n = 2k+1$

أ- بين أن : $\forall k \in \mathbb{N} , (2k+1) \wedge (2k+3) = 1$

ب- أحسب $S_{2k+1} \wedge S_{2k+2}$ ، لكل $k \in \mathbb{N}$

4. بين أن : $\exists ! n \in \mathbb{N}^* , S_n \wedge S_{n+1} = 1$

التمرين 2 :

1. ليكن x عددا حقيقيا.

1. تحقق من أن : $x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$

2. أكتب $x^2 + 4$ على شكل جداء ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية بمعاملات نسبية.

11. ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$. نضع : $d = A \wedge B$ حيث

$$A = n^2 - 2n + 2 \quad \text{و} \quad B = n^2 + 2n + 2$$

1. تحقق من أن $n^2 + 4$ ليس أوليا.

2. بين انه إذا كان m يقسم A و m يقسم n ، فإن m يقسم 2.

3. بين انه إذا كان m يقسم A و m يقسم B ، فإن m يقسم $4n$

4. نفترض أن n فردي.

أ- بين أن A و B فرديان واستنتج أن d فردي.

ب- بين أن d يقسم n .

ج- بين أن d يقسم 2 ، ثم أن $A \wedge B = 1$.

5. نفترض أن n زوجي.

أ- بين أن 4 لا يقسم $n^2 - 2n + 2$.

ب- بين أنه يوجد عدد طبيعي فردي p بحيث $d = 2p$.

ج- بين أن p يقسم n وأن $d = 2$.

التمرين 3 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 ، ثم تظن رقمي الوحدات ورقم

العشرات في الكتابة في النظمة ذات الأساس 10 للعدد u_n .

2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} , u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$

استنتج أن : $\forall k \in \mathbb{N} , u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$

وأن : $\forall k \in \mathbb{N} , u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$

3. أ- بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} , 2u_n = 5^{n+2} + 3$

ب- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} , 2u_n \equiv 28 \pmod{100}$

4. حدد رقمي الوحدات والعشرات في الكتابة في النظمة ذات الأساس 10 للعدد u_n

5. تحقق من أن القاسم المشترك الأكبر لحدين متتابعين من المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هو عدد ثابت وأعط قيمته.

التمرين 4 :

نعتبر في \mathbb{Q} المعادلة :

$$(1) : 78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$$

حيث $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$

1. نفترض أن $\frac{14}{39}$ حل للمعادلة (1).

أ- تحقق من أن : $14u + 39v = 1129$

ب- باستعمال خوارزمية أقليدس ، محدد جميع مراحل الانجاز ، حدد زوجا (x,y) من عددين نسبيين بحيث :

$$(2) : 14x + 39y = 1$$

تحقق من أن $(-25,9)$ حل لهذه المعادلة.

حدد مجموعة حلول المعادلة (2).

ج- استنتج حلا خاصا (u_0, v_0) للمعادلة :

$$(3) : 14u + 39v = 1129$$

حدد الحل العام للمعادلة (3).

د- حدد الأزواج (u,v) التي من أجلها يكون u هو أصغر عدد

صحيح طبيعي ممكن.

2. أ- فكك العددين 78 و 14 إلى جداء عوامل أولية.

استنتج في \mathbb{N} ، مجموعة قواسم 78 ومجموعة قواسم 14.

التسعين :7

1. أ- أحسب : $(1+\sqrt{6})^2$ و $(1+\sqrt{6})^4$ و $(1+\sqrt{6})^6$.
 ب- طبق خوارزمية أفليديس على العددين 847 و 342.
 2. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر a_n و b_n العددين الطبيعيين المعرفين بما

$$\text{يلي : } (1+\sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

أحسب a_1 و b_1 .

باستعمال السؤال (1.أ-) ، أعط تعبيراً آخر لكل من a_n و b_n .

أ- أحسب a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n .

ب- بين أنه إذا كان 5 لا يقسم $a_n + b_n$ ، فإن 5 لا يقسم

$a_{n+1} + b_{n+1}$ ، ثم بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، لدينا : 5 لا يقسم $a_n + b_n$.

ج- بين أن : $a_{n+1} \wedge b_{n+1} = 1 \Rightarrow a_n \wedge b_n = 1$.

د- استنتج أن : $a_n \wedge b_n = 1$ ، $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

التسعين :8

ليكن a و b عددين نسبيين بحيث $a \wedge b = 1$.

نضع : $c = a^4 + b^4$

1. أ- ليكن x عدداً نسبياً .

بين أنه إذا كان x زوجياً ، فإن $x^4 \equiv 0 \pmod{16}$

بين أنه إذا كان x فردياً ، فإن $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$

ب- استنتج أن : $c \equiv 1 \pmod{16}$ أو $c \equiv 2 \pmod{16}$.

2. ليكن p عدداً أولياً قاسماً للعدد c بحيث $2 < p$.

أ- بين أن : $a \wedge p = 1$

ب- بين أن : $\exists k \in \mathbb{Z} / ka \equiv 1 \pmod{p}$

ج- استنتج أن : $\exists q \in \mathbb{Z} / q^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

التسعين :9

1. حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $3x - 2y = 1$: (E)

2. ليكن n عدداً صحيحاً طبعياً غير منعدم.

أ- بين أن الزوج $(14n + 3, 21n + 4)$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتج أن العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما.

3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n + 1$ و $21n + 4$

أ- بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$.

ب- بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6 \pmod{13}$

4. من أجل كل عدد صحيح طبعياً $n \geq 2$ ، نضع :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \text{ و } B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$$

أ- بين أن العددين A و B قابلان للقسمة على $n - 1$ في \mathbb{Z} .

ب- حدد حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

ب- ليكن $\frac{p}{q}$ ، عنصراً من \mathbb{Q} ، حلاً جذرياً للمعادلة (1).

بين أن : $p \wedge q = 1 \Rightarrow p / 14$ و $q / 78$.

ج- حدد الأعداد الجذرية المرشحة لأن تكون حلولاً للمعادلة (1) ، و حدد الأعداد الموجبة منها.

التسعين :5

1. أ- حدد حسب زوجية العدد الصحيح الطبيعي n ، العدد :

$$(n^2 + 1) \wedge (n + 1)$$

ب- بين أن العدد $n^2 + 1$ ليس مربعاً كاملاً.

2. لتكن a و b و c أعداداً صحيحة طبيعية غير منعدمة بحيث :

$$a \wedge b = 1 \text{ و } a(n^2 + 1) = b^2(n + 1)$$

أ- بين أن $a \wedge b^2 = 1$ ، ثم أن $a \leq n$ و $b \leq n$.

ب- بين أن $(n^2 + 1) \wedge (n + 1) = 2$.

ج- نضع $n^2 + 1 = 2p$ و $n + 1 = 2q$ ، بحيث :

$$p \wedge q = 1 \text{ و } (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

بين أن : $a = q$ و $b^2 = p$.

د- نفترض أن $b = a + 1$. أحسب الأعداد a و b و c .

التسعين :6

1. أ- حدد ، حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9.

ب- بين أن : $2005^{2005} \equiv 7 \pmod{9}$.

2. أ- بين أن : $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ ، $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

ب- ليكن N عدداً صحيحاً طبعياً مكتوباً في نظمة العد ذات الأساس 10. ليكن S مجموع أرقام العدد N .

بين أن : $N \equiv S \pmod{9}$.

ج- استنتج أن : $9 / N \Leftrightarrow 9 / S$.

3. نعتبر العدد $A = 2005^{2005}$.

ليكن : B مجموع أرقام العدد A .

C مجموع أرقام العدد B .

D مجموع أرقام العدد C .

أ- بين أن : $A \equiv D \pmod{9}$.

ب- علماً أن : $2005 < 10000$ ، بين أن A يكتب في نظمة العد العشري بأقل من 8020 رقماً.

استنتج أن $B \leq 72180$.

ج- استنتج أن : $C \leq 45$.

د- بملاحظة الأعداد الصحيحة الطبيعية الأصغر من 45 ، حدد عدداً صحيحاً طبعياً m بحيث : $C \leq m$ و $m \leq 15$.

هـ- بين أن : $D = 7$.