

سلسلة 1	الحسابيات حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1 :		
<p>لدينا : $1[12] = 145$ منه : $1[12] = 145^{2015}$ إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 145^{2015} على 12 هو 1</p>		
<p>لدينا : $2[7] = 247$ منه : $247^3 = 8[12]$ منه : $247^3 = 1[17]$ (لأن : $8 = 1[7]$) علمنا أن : $2015 = 3 \times 671 + 2$ فإن : $\begin{cases} 247^{3 \times 671} = 1[7] \\ 247^2 = 2^2[7] \end{cases}$ ومنه : $247^{2015} = 4[7]$ إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 247^{2015} على 7 هو 4</p>		
<p>لدينا : $2[11] = 2015$ منه : $2015^5 = 32[11]$ منه : $2015^5 = -1[11]$ (لأن : $32 = -1[11]$) علمنا أن : $2016 = 5 \times 403 + 1$ فإن : $\begin{cases} 2015^{5 \times 403} = (-1)^{403} = -1[11] \\ 2015 = 2[11] \end{cases}$ ومنه : $2015^{2016} = -2 = 9[11]$ إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 2015^{2016} على 11 هو 9</p>		
<p>لدينا : $9 = 2[7]$ منه : $9^n = 2^n[7]$ منه : $9^n + 3 \times 2^{n+1} = 2^n + 3 \times 2^{n+1}[7]$ منه : $9^n + 3 \times 2^{n+1} = 7 \times 2^n = 0[7]$ بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 7/3^{2n} + 3 \times 2^{n+1}$</p>		
<p>بالنسبة للقيم $n=1$ و $n=2$ العبارة صحيحة، الآن ليكن : $n > 2$ $1 = 1[n-1]$ $n = 1[n-1]$ لدينا : $n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1)$ وبما أن : $n^2 = 1[n-1]$ (لأن : $n = 1[n-1] \Rightarrow n^2 = 1[n-1]$) $\dots = \dots$ $n^{n-2} = 1[n-1]$ فإن : $n-1/n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1 = n-1 = 0[n-1]$ منه : $n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1 = n-1$ منه : $n^{n-1} - 1 = m(n-1)^2$ ، منه : $\exists m \in \mathbb{Z} / n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1 = m(n-1)$ بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n-1)^2 / n^{n-1} - 1$</p>		
تمرين 2 :		
	<p>نضع : $d = (7a+3) \wedge (9a+4)$ منه : $\begin{cases} d/7a+3 \\ d/9a+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/63a+27 \\ d/63a+28 \end{cases} \Rightarrow d/(63a+28) - (63a+27) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$ بالتالي : $(7a+3) \wedge (9a+4) = 1$</p>	1
	<p>نضع : $d = a \wedge b$ و $\delta = (9a+4b) \wedge (2a+b)$ منه : $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a \text{ et } d/9a \\ d/b \text{ et } d/4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a+b \\ d/9a+4b \end{cases} \Rightarrow d/\delta$ و : $\begin{cases} \delta/2a+b \\ \delta/9a+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/8a+4b \text{ et } \delta/9a+4b \\ \delta/18a+9b \text{ et } \delta/18a+8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/a \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \delta/d$ منه : $\delta = d$ أي : $(9a+4b) \wedge (2a+b) = a \wedge b$</p>	2
	<p>$a \wedge (bc) = 1 \Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bcv = 1 \Rightarrow \begin{cases} au + b(cv) = 1 \\ au + c(bv) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$</p>	3

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists (u_1, v_1) \in Z^2 / a u_1 + b v_1 = 1 \\ \exists (u_2, v_2) \in Z^2 / a u_2 + c v_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (a u_1 + b v_1)(a u_2 + c v_2) = 1$$

$$\Rightarrow (a u_1 u_2 + c v_2 u_1 + b v_1 u_2) a + (v_1 v_2) b c = 1$$

وعكسيا :

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge (bc) = 1$$

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge (bc) = 1 : \text{بالتالي}$$

ليكن : $a \wedge b = 1$ ، نضع : $d = (a+b) \wedge b$ و $d = (a+b) \wedge a$:
 لدينا : $(a+b) \wedge a = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (a+b) \wedge a = 1$

و : $(a+b) \wedge b = 1 \Rightarrow \delta = 1 \Rightarrow \delta/a \wedge b \Rightarrow \delta/1 \Rightarrow \delta = 1 \Rightarrow (a+b) \wedge b = 1$

$$\begin{cases} (a+b) \wedge a = 1 \\ (a+b) \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow (a+b) \wedge ab = 1 : \text{الآن}$$

ليكن : $a \wedge b = 1$
 لدينا : $(a^3 - b^3) \wedge (a^2 - b^2) = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \wedge (a-b)(a+b) = (a-b)((a^2 + ab + b^2) \wedge (a+b))$

(ب) نضع : $d = (a^2 + ab + b^2) \wedge (a+b)$ ، منه و باستعمال نتيجة السؤال السابق نجد :

$$\begin{cases} d/a + b \\ d/(a+b)^2 - ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(a+b)^2 \\ d/(a+b)^2 - ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a + b \\ d/ab \end{cases} \Rightarrow d/(a+b) \wedge ab \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$$

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow (a^3 - b^3) \wedge (a^2 - b^2) = a - b : \text{بالتالي}$$

$$\exists (\alpha, \beta) \in IN^2 \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1 : \text{نضع : } d = a \wedge b$$

$$\text{منه : } (a^2 + b^2) \wedge ab = (d^2(\alpha^2 + \beta^2)) \wedge d^2 \alpha \beta = d^2((\alpha^2 + \beta^2) \wedge \alpha \beta)$$

$$\text{نضع : } d = (\alpha^2 + \beta^2) \wedge \alpha \text{ و } \delta = (\alpha^2 + \beta^2) \wedge \beta$$

$$\alpha \wedge \beta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \wedge \beta = 1 \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \wedge \beta \times \beta = 1 \\ \alpha \times \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \wedge \beta^2 = 1 \\ \alpha^2 \wedge \beta = 1 \end{cases} : \text{لدينا حسب نتيجة سابقة}$$

$$d = (\alpha^2 + \beta^2) \wedge \alpha \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2 + \beta^2 \\ d/\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2 + \beta^2 \\ d/\alpha^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\beta^2 \\ d/\alpha \end{cases} \Rightarrow d/\alpha \wedge \beta^2 \Rightarrow d = 1 : \text{منه}$$

$$\delta = (\alpha^2 + \beta^2) \wedge \beta \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2 + \beta^2 \\ \delta/\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2 + \beta^2 \\ \delta/\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2 \\ \delta/\beta \end{cases} \Rightarrow \delta/\alpha^2 \wedge \beta \Rightarrow \delta = 1 : \text{و}$$

$$(a^2 + b^2) \wedge ab = d^2 = (a \wedge b)^2 : \text{بالتالي : بين أن } \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2) \wedge \alpha = 1 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \wedge \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2) \wedge \alpha \beta = 1 : \text{الآن}$$

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow \exists (u, v) \in Z^2 / a u + b v = 1 \Rightarrow a u = 1 - b v \Rightarrow a^2 u^2 = 1 - 2 b v + b^2 v^2$$

$$\Rightarrow 2 b v = 1 + b^2 v^2 - a^2 u^2 \Rightarrow 4 b^2 v^2 = 1 + b^4 v^4 + a^4 u^4 + 2 b^2 v^2 - 2 a^2 u^2 - 2 a^2 b^2 u^2 v^2$$

$$\Rightarrow a^2 (2 u^2 + 2 b^2 u^2 v^2 - a^2 u^4) + b^2 (2 v^2 - b^2 v^4) = 1$$

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow a^2 \wedge b^2 = 1$$

لدينا :

$$d = a \wedge b \text{ و نضع : } a^2 / b^2$$

$$\exists (\alpha, \beta) \in IN^2 \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1 \text{ و } \exists k \in IN^2 \quad b^2 = k a^2 : \text{إذن}$$

$$\text{منه : } d^2 \beta^2 = k d^2 \alpha^2 \text{ منه : } \beta^2 = k \alpha^2 \text{ وحيث أن : } \alpha^2 / \alpha^2 \text{ فإن : } \alpha^2 / \alpha^2 \wedge \beta^2$$

وبما أن: $\alpha \wedge \beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 \wedge \beta^2 = 1$ فإن: $\alpha^2 / 1$ منه: $\alpha = 1$

منه: $\begin{cases} a = d \\ b = \beta d \end{cases}$ منه: $b = a d$ بالتالي: a/b

ب) بوضع: $d = a \wedge b$ نستنتج أن: $\alpha \wedge \beta = 1$ $\begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$

و باستعمال نتيجة السؤال ج) نجد: $a^2 \wedge b^2 = d^2 (\alpha^2 \wedge \beta^2) = d^2 \times 1 = d^2 = (a \wedge b)^2$

نفترض أن: $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ إذن: $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ $\exists (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ / منه: $5b^2 = a^2$ منه: b^2 / a^2

ج) و باستعمال نتيجة السؤال أ) نستنتج أن: b/a منه: $a = kb$ $\exists k \in \mathbb{N}$ / منه: $5b^2 = k^2 b^2$

منه: $5 = k^2$ وبما أن: $4 < 5 < 9$ فإن: $4 < k^2 < 9$ منه: $2 < k < 3$ وهذا غير ممكن

بالتالي: $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

أ) ليكن $a \wedge b = 1$ ولنبين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \wedge b^n = 1)$

بالنسبة لـ $n=1$: العبارة صحيحة

الآن نفترض أن: $a \wedge b^n = 1$ ولنبين أن: $a \wedge b^{n+1} = 1$

ب) باستعمال نتيجة السؤال 3) نجد بسهولة أن: $a \wedge b^{n+1} = 1 \Rightarrow a \wedge b^n \times b = 1 \Rightarrow a \wedge b^n = 1$ $\begin{cases} a \wedge b^n = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

و هذا ينهي البرهان.

يجب الانتباه جيدا للعبارة، الافتراض لا يجب أن يتم على العبارة ككل بل على نتيجة الاستلزام فقط (إنه المنطق الرياضي)

ليكن: $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ، باستعمال نتيجة السؤال السابق مرتين نجد أن:

استنتج أن: $a^m \wedge b^m = 1 \Rightarrow b^m \wedge a^n = 1 \Rightarrow b^m \wedge a = 1 \Rightarrow a \wedge b^m = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1$

ب) نتيجة هذا السؤال هي خاصية بالدرس يمكن استعمالها دون برهان، لذلك فالهدف من السؤال هو تقديم برهان هذه الخاصية

نفس الشيء ينطبق على السؤال الثالث

ج) نفترض أن: $\log_{10}(2) \in \mathbb{Q}$ إذن: $2^{\frac{m}{n}} = 10$ $\exists (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ / منه: $2^m = 10^n$ منه:

$2^m = 2^n \times 5^n$ منه: $5^n / 2^m$ و حيث أن: $5^n / 5^n$ فإن: $5^n / 2^m \wedge 5^n$

و لكون: $2 \wedge 5 = 1$ فحسب السؤال السابق نستنتج أن: $2^m \wedge 5^n = 1$ منه: $5^n / 1$ أي: $5^n = 1$

منه: $n = 0$ وهذا يناقض كون: $n \in \mathbb{N}^*$

بالتالي: $\log_{10}(2) \notin \mathbb{Q}$

الهدف من هذا التمرين هو التمكن من استعمال القواعد الهامة التالية:

مبرهنة Bezout (لأنها أحيانا تكون الوسيلة الوحيدة للبرهان)

$d = a \wedge b \Rightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1$ ، $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^m = 1$ ، $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge (bc) = 1$

مبرهنة كوس (Gauss): $\begin{cases} a/bc \\ a \wedge b \end{cases} \Rightarrow a/c$ ، $ac \wedge bc = c(a \wedge b)$

تمرين 3:

لدينا: $\begin{cases} x = 7k \\ y = 5k \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$ $10x = 14y \Leftrightarrow 5x = 7y \Leftrightarrow$ بالتالي: $S = \{(7k; 5k) / k \in \mathbb{Z}\}$

$$3x-2y=1 \Leftrightarrow 3x-2y=3-2 \Leftrightarrow 3(x-1)=2(y-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2k \\ y-1=3k \end{cases} / k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k+1 \\ y=3k+1 \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(2k+1; 3k+1) / k \in \mathbb{Z}\} \text{ بالتالي:}$$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص، منه: (2; -3)

$$17x+11y=1 \Leftrightarrow 17x+11y=2 \times 17 - 3 \times 11 \Leftrightarrow 17(x-2)=11(-y-3)$$

$$17x+11y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=11k \\ -y-3=17k \end{cases} / k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11k+2 \\ y=-17k-3 \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(11k+2; -17k-3) / k \in \mathbb{Z}\} \text{ بالتالي:}$$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=1$ هو (2; 3) منه الحل الخاص للمعادلة

$$5x-3y=1 \Leftrightarrow 5x-3y=5 \times 14 - 3 \times 21 \Leftrightarrow 5(x-14)=3(y-21)$$

$$5x-3y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-14=3k \\ y-21=5k \end{cases} / k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+14 \\ y=5k+21 \end{cases} / k \in \mathbb{Z} \quad \text{منه: } (14; 21)$$

$$S = \{(3k+14; 5k+21) / k \in \mathbb{Z}\} \text{ بالتالي:}$$

$$10x-2y=6 \Leftrightarrow 5x-y=3 \Leftrightarrow y=5x-3$$

$$S = \{(k; 5k-3) / k \in \mathbb{Z}\} \text{ بالتالي:}$$

عندما يكون أحد لعمالات 1 أو -1 فنكتفي بكتابة أحد المجهولين بدلالة الآخر.

$$S = \emptyset \text{ لدينا: } 15x+6y=11 \Rightarrow 3(5x+2y)=11 \Rightarrow 3/11$$

تمرين 4: a و b عددين صحيحان طبيعيين غير منعدمان.

1 انظر السؤال 3 أم من التمرين السابق

$$d \Delta = xy \text{ وأن } \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \begin{cases} x = \alpha d \\ y = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1 \text{ نستنتج أن: } \begin{cases} d = x \wedge y \\ \Delta = x \vee y \end{cases} \text{ بوضع:}$$

$$\Delta = \alpha \beta d \text{ منه: } d \Delta = \alpha \beta d^2$$

$$\text{منه: } (x+y) \wedge (x \vee y) = (d\alpha + d\beta) \wedge \alpha \beta d = d((\alpha + \beta) \wedge \alpha \beta)$$

$$\text{ولكون: } \alpha \wedge \beta = 1 \text{ وحسب السؤال السابق نستنتج أن: } (\alpha + \beta) \wedge \alpha \beta = 1$$

$$\text{بالتالي: } (x+y) \wedge (x \vee y) = d = x \wedge y$$

$$\text{بوضع: } \begin{cases} d = x \wedge y \\ \Delta = x \vee y \end{cases} \text{ نستنتج أن: } \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \begin{cases} x = \alpha d \\ y = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1 \text{ وباستعمال النتيجة السابقة}$$

$$\begin{cases} x+y=276 \\ x \vee y=1440 \\ x < y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=276 \wedge 1440 \\ d(\alpha + \beta)=276 \\ \alpha \beta d=1440 \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=12 \\ \alpha + \beta=23 \\ \alpha \beta=120 \\ \alpha \wedge \beta=1 \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta) \in \{(8; 15)\}$$

منه: $(x, y) = (96; 180)$ ، عكسيا نتحقق بسهولة من أن هذا الزوج يحقق النظام المقترحة

$$S = \{(96; 180)\} \text{ خلاصة:}$$