سلسلة 2	الحسابيات حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)

1

نضع: $d=a\wedge b$ منه : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ / \begin{cases} a=d\alpha \\ b=d\beta \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases}$

و حيث أن : $(a\wedge b).(a\vee b)=ab$ فإن : $d.(a\vee b)=d^2\alpha\beta$ منه: $a\vee b=d\alpha\beta$ ، الآن ، لدينا :

$$(a\wedge b)+(a\vee b)=a+b \Leftrightarrow d+d\alpha\beta=d\alpha+d\beta \Leftrightarrow 1+\alpha\beta=\alpha+\beta \Leftrightarrow 1-\alpha+\beta(\alpha-1)=0$$

$$(a\wedge b)+(a\vee b)=a+b \Leftrightarrow (\alpha-1)(\beta-1)=0 \Leftrightarrow (\alpha=1)\ ou\ (\beta=1) \Leftrightarrow (a/b)\ ou\ (b/a)$$

2

- نفرض أن : $(a^2+ab+b^2)\wedge ab=1$ ، نضع : $a\wedge b=d$ منه:

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/b^2 \\ d/a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow d/(a^2+ab+b^2)\wedge(ab) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

- نفرض الآن أن : $a\wedge b=1$ ، إذن : $a\wedge b^2=1$ و $a^2\wedge b=1$

نضع : $(a^2+ab+b^2)\wedge a=d$ ، منه :

$$\begin{cases} d/a \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/a(a+b) \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a\wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

و بنفس الطريقة نبين أن : $(a^2+ab+b^2)\wedge b=1$

الآن : $\begin{cases} (a^2+ab+b^2)\wedge a=1 \\ (a^2+ab+b^2)\wedge b=1 \end{cases} \Rightarrow (a^2+ab+b^2)\wedge ab=1$

خلاصة : $a\wedge b=1 \Leftrightarrow (a^2+ab+b^2)\wedge ab=1$

للتذكير: $x\wedge y=1 \Leftrightarrow x^n\wedge y^m=1$ و $\begin{cases} x\wedge y=1 \\ x\wedge z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x\wedge yz=1$

هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين (على الأقل أعرف طريقتين) ،لكننا فضلنا إدراج الطريقة التي يمكن تعميمها على أسئلة مشابهة.

3

- بداية نعلم أن : $(a\wedge c)/a$ و $(b\wedge c)/b$ منه : $(a\wedge c)(b\wedge c)/ab$ ، إذن : $c/ab \Rightarrow c/(a\wedge c)(b\wedge c)$

- من جهة أخرى ، نضع: $d=a\wedge c$ منه : $\exists(\alpha,\gamma)\in IN^2 \ / \begin{cases} a=d\alpha \\ c=d\gamma \\ \alpha\wedge\gamma=1 \end{cases}$

بين أن :

$$c/ab \Rightarrow d\gamma/d\alpha b \Rightarrow \begin{cases} \gamma/\alpha b \\ \alpha\wedge\gamma=1 \end{cases} \Rightarrow \gamma/b \Rightarrow \gamma d/bd \Rightarrow c/b(a\wedge c)$$

مرة أخرى نضع : $\delta=b\wedge c$ منه : $\exists(p,q)\in IN^2 \ / \begin{cases} b=\delta p \\ c=\delta q \\ p\wedge q=1 \end{cases}$ منه :

$$c/b(a\wedge c) \Rightarrow \delta q/\delta p\,(a\wedge c) \Rightarrow \begin{cases} q/p\,(a\wedge c) \\ p\wedge q=1 \end{cases} \Rightarrow q/(a\wedge c) \Rightarrow \delta q/\delta\,(a\wedge c) \Rightarrow c/(b\wedge c)(a\wedge c)$$

4

نفرض أن : $a \wedge b = 1$ ، إذن : $a^2 \wedge b^2 = 1$ ، لدينا إذن:

$$\left(a^2-b^2\right)\wedge\left(a^3-b^3\right)=(a-b)(a+b)\wedge(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=(a-b)\left((a+b)\wedge\left(a^2+ab+b^2\right)\right)$$

نضع : $(a+b)\wedge\left(a^2+ab+b^2\right)=d$ ، إذن :

$$\begin{cases} d/a+b \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2+ab \\ d/ab+b^2 \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2 \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a^2\wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

بالتالي: $\left(a^2-b^2\right)\wedge\left(a^3-b^3\right)=a-b$

تمرين 2 : n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1

لدينا : $A=ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)=\left(a^3b-ab^3\right)\left(a^2+b^2\right)$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^3\equiv a[3] \\ b^3\equiv b[3] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^3\equiv ab[3] \\ ab^3\equiv ab[3] \end{cases}$ منه : $ba^3-ab^3\equiv 0[3]$ منه : $A\equiv 0[3]$

لدينا من جهة أخرى : $A=ab\left(a^4-b^4\right)=a^5b-ab^5$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^5\equiv a[5] \\ b^5\equiv b[5] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^5\equiv ab[5] \\ ab^5\equiv ab[5] \end{cases}$ منه : $ba^5-ab^5\equiv 0[5]$ منه : $A\equiv 0[5]$

إذن : $3/A$ و $5/A$ ، وبما أن : $3\wedge 5=1$ فإن : $15/A$ ، بالتالي : $15/\,ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$

2

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n^7\equiv n[7]$

و $n^3\equiv n[3]$ منه: $n^6\equiv n^2[3]$ منه: $\begin{cases} n^7\equiv n^3[3] \\ n^3\equiv n[3] \end{cases}$ منه : $n^7\equiv n[3]$

و $n^2\equiv n[2]$ منه: $n^6\equiv n^3[2]$ منه : $n^7\equiv n^4\equiv n^2\equiv n[2]$

بما أن 2 و 3 و 7 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $42/n^7-n \quad \forall n\in IN$

بالنسبة للعدد 2 يمكن دراسة حالات الزوجية فقط دون الحاجة لمبرهنة فيرما.

3

لدينا :

$$4^n+6n+8=4^n-1+6n+9=3\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1\right)+6n+9=3\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3\right)$$

الآن لدينا : $\begin{aligned} 1 &\equiv 1[3] \\ 4 &\equiv 1[3] \\ 4^2 &\equiv 1[3] \\ \ldots. &\equiv ..[3] \\ 4^{n-1} &\equiv 1[3] \\ 4^n &\equiv 1[3] \end{aligned}$ منه : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1 \equiv n\,[3]$ منه :

$4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3\equiv 3n+3\equiv 0\,[3]$ ، إذن : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3\equiv 3k / k\in IN$

منه : $4^n+6n+8=9k$ ، بالتالي : بين أن : $9/4^n+6n+8$

4

لدينا : $6^n-1-5n=5\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots.+6+1-n\right)$

و بنفس طريقة السؤال السابق نبين أن : $\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots+6+1\right)-n\equiv n-n\equiv 0\,[5]$

منه : $\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots+6+1\right)-n=5k \quad / k\in IN$ بالتالي : بين أن : $6^n\equiv 1+5n[25]$

تمرين 3 : a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

- إذا كان a زوجي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} زوجيان ، و إذا كان a فردي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} فرديان

في كلا الحالتين $a^{4b+d}-a^{4c+d}$ زوجي، منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[2]$

- إذا كان $a\equiv 0[3]$ فإن : $a^{4b+d}\equiv 0[3]$ و $a^{4c+d}\equiv 0[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$

في الحالة الآخرى نستنتج أن : $3\wedge a=1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^2\equiv 1[3]$ منه : $a^{4b}\equiv 1[3]$ و $a^{4c}\equiv 1[3]$

منه : $a^{4b}\equiv a^{4c}[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$ ، في كل الحالات نجد أن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$

- إذا كان $a\equiv 0[5]$ فإن : $a^{4b+d}\equiv 0[5]$ و $a^{4c+d}\equiv 0[5]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[5]$

في الحالة الآخرى نستنتج أن : $5\wedge a=1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^4\equiv 1[5]$ منه : $a^{4b}\equiv 1[5]$ و $a^{4c}\equiv 1[5]$

منه : $a^{4b}\equiv a^{4c}[5]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[5]$ ، في كل الحالات نجد أن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[5]$

بما أن 2 و 3 و 5 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[30]$

تمرين 4 : p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.(السؤالان مستقلان)

1

بدراسة زوجية العدد n نستنتج بسهولة أن : $(n+1)^p\equiv n^p+1\,[2]$

من جهة أخرى و حسب مبرهنة فيرما $\begin{cases}(n+1)^p\equiv n+1\,[p]\\ n^p\equiv n\,[p]\end{cases}$ منه : $(n+1)^p-n^p\equiv 1\,[p]$

أي : $(n+1)^p\equiv n^p+1\,[p]$

و بما أن p عدد أولي أكبر من 2 فإن : $p\wedge 2=1$ بالتالي : $(n+1)^p\equiv n^p+1\,[2p]$

2

لدينا $p>2$ منه : $p^2-p>0$ ، منه : $n^{p^2}-n^p=n^p\left(n^{p^2-p}-1\right)$

- إذا كان $n\equiv 0[p]$ فإن : $n^2\equiv 0\left[p^2\right]$ منه : $n^{p^2}-n^p=n^2\,n^{p-2}\left(n^{p^2-p}-1\right)\equiv 0\left[p^2\right]$
- في الحالة الأخرى يكون لدينا : $n\wedge p=1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $n^p\equiv 1[p]$

منه : $n^{p^2-p}-1=\left(n^p\right)^{p-1}-1=\left(n^p-1\right)\left[\left(n^p\right)^{p-2}+\left(n^p\right)^{p-3}+\ldots+n^p+1\right]$

من $n^p\equiv 1[p]$ نستنتج أن : $\left(n^p\right)^{p-2}+\left(n^p\right)^{p-3}+\ldots+n^p+1\equiv p\equiv 0[\,p\,]$

إذن : $n^p-1=p\sim /\sim\in IN$ و $\left(n^p\right)^{p-2}+\left(n^p\right)^{p-3}+\ldots+n^p+1\equiv \quad p/\quad \in IN$

منه: $n^{p^2}-n^p=n^p\sim\quad p^2$ ، منه : بين أن : $n^{p^2}\equiv n^p\left[p^2\right]$

في جميع الحالات نستنتج أن : $n^{p^2}\equiv n^p\left[p^2\right]$

تمرين 5 : n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 .

1

لدينا : $A_n=n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$

و بما أن : $n^2+n+1>1$ و $n^2+n+1=n(n-1)+1>1$ ، إذن A_n غير أولي.

2

بدراسة زوجية العدد n نستنتج أن n^4+n^2 زوجي ، إذن A_n عدد فردي

ما يعني أن التفكيك الأولي للعدد A_n لا يحتوي على العدد 2

3

بين أن : $n\wedge 3=1 \;\Rightarrow\; 3/A_n$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n\wedge 3=1 \;\Rightarrow\; n^2\equiv 1[3] \;\Rightarrow\; n^4\equiv 1[3]\Rightarrow n^4+n^2+1\equiv 3\equiv 0[\,3\,] \;\Rightarrow\; 3/A_n$

تمرين 6 : a و b و x أعداد من IN^* حيث $x>1$ ، نضع : $a\wedge b=d$

1

لدينا : $a\wedge b=d$ $\quad \exists(\sim,\ )\in IN^2 \;/\; \begin{cases}a=d\sim\\ b=d\\ \sim\wedge\ =1\end{cases}$

		ولدينا : $x^{d} \equiv 1\left[x^{d}-1\right]$ ، منه : $\begin{cases} x^{\sim d} \equiv 1\left[x^{d}-1\right] \\ x^{\ d} \equiv 1\left[x^{d}-1\right] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{\sim d}-1 \equiv 0\left[x^{d}-1\right] \\ x^{\ d}-1 \equiv 0\left[x^{d}-1\right] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{d}-1/x^{\sim d}-1 \\ x^{d}-1/x^{\ d}-1 \end{cases}$ إذن : $\left(x^{d}-1\right)/\left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)$	
2		$(E)\quad a\,x+by=d$	
	أ)	لدينا : $\sim \wedge \ =1$ إذن حسب مبرهنة Bezout فإن: $\exists(x_0,y_0)\in Z^{2}\ /\sim x_0+\ \ y_0=1$ منه : $\sim d\,x_0+\ \ d\,y_0=d$ أي : $a\,x_0+b\,y_0=d$ ما يعني أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0,y_0) في Z^{2}	
	ب)	$(E)\Leftrightarrow\ \sim x+\ \ y=1\Leftrightarrow\ \sim x+\ \ y=\sim x_0+\ \ y_0\Leftrightarrow\ \sim(x-x_0)=\ \ (y_0-y)$ $(E)\Leftrightarrow\begin{cases} x-x_0=\ \ k \\ y_0-y=\sim k \end{cases}/k\in Z\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x=\ \ k+x_0 \\ y=y_0-\sim k \end{cases}/k\in Z$ بالتالي : $S=\left\{\left(\ \ k+x_0\ ,y_0-\sim k\right)/\ k\in Z\right\}$	
	ج)	لنبحث عن إمكانية إيجاد زوج (x,y) من مجموعة الحلول السابقة حيث يكون : $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\leq 0 \end{cases}$ لدينا : $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \ \ k+x_0\geq 0 \\ y_0-\sim k\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k\geq\frac{-x_0}{\ } \\ k\geq\frac{y_0}{\sim} \end{cases}$ إذن يكفي أن نأخذ : $k=k_0=Max\left(E\left(\frac{-x_0}{\ }\right);E\left(\frac{y_0}{\sim}\right)\right)+1$ مما يعني صحة العبارة : $\exists(u,v)\in IN^{2}\ /\ \ au-bv=d$ حيث : $u=\ \ k_0+x_0$ و $v=-(y_0-\sim k_0)=\sim k_0-y_0$	
	د)	لدينا: $\left(x^{au}-1\right)-\left(x^{bv}-1\right)x^{d}=x^{au}-1-x^{bv+d}+x^{d}=x^{au}-1-x^{au}+x^{d}=x^{d}-1$	
3		لدينا من جهة حسب السؤال الأول : $\left(x^{d}-1\right)/\left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)\quad(1)$ و من جهة أخرى : $\begin{cases} x^{a}\equiv 1\left[x^{a}-1\right] \\ x^{b}\equiv 1\left[x^{b}-1\right] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{au}\equiv 1\left[x^{a}-1\right] \\ x^{bv}\equiv 1\left[x^{b}-1\right] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{a}-1/x^{au}-1 \\ x^{b}-1/x^{bv}-1 \end{cases}$ وحيث أن : $\left(x^{d}-1\right)/\left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)$ فإن : $\begin{cases} \left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)/x^{a}-1 \\ \left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)/x^{b}-1 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} \left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)/x^{au}-1 \\ \left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)/x^{bv}-1 \end{cases}$ منه : $\left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)/\left(x^{au}-1\right)-\left(x^{bv}-1\right)x^{d}$ أي : $\left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)/x^{d}-1\quad(2)$ من (1) و (2) نستنتج أن : $\left(x^{a}-1\right)\wedge\left(x^{b}-1\right)=\left(x^{a\wedge b}-1\right)$	