~ الثانية علوم رياضية ~

سلسلة المتتاليات (2)

التمرين 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين أن $2 \le u_n \le 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بما يلي :

$v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

بين أن : $v_{n+1} = 2 + \frac{v_n}{1+2v_n}$ و $w_{n+1} = 2 + \frac{w_n}{1+2w_n}$ و $w_n = 2 + \frac{1}{v_n}$

3) أ. أثبت أن : $v_n \le w_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب. أدرس رتابة كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n)

4) أ. بين أن : $w_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{25}(w_n - v_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب. استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n - v_n)$

ج. بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) متحاديتان و حدد نهايتهما

5) نضع $\alpha = 1 + \sqrt{2}$

أ. حدد عددا حقيقيا k بحيث : $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها

التمرين 2

نعتبر الحدودية P_n المعرفة بما يلي : $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1) بين أنه $P_n(\varepsilon_n) = 0 \quad (\exists! \varepsilon_n \in]0,1[) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$

2) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n \ge 2}$ تناقصية قطعا

3) بين أن : $2\varepsilon_n - (\varepsilon_n)^{n+1} - 1 = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$

4) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n \ge 2}$ متقاربة

5) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n$

التمرين 3

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث : $f([a;b]) \subset [a;b]$

نفترض أنه : $|f'(x)| \le k \quad (\forall x \in]a;b[) \quad (\exists k \in [0;1[)$

1) بين أنه : $f(\alpha) = \alpha \quad (\exists! \alpha \in [a;b])$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 \in [a;b]$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

أ. بين أن : $a \leq u_n \leq b$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب. بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج. استنتج نهاية المتتالية (u_n)

3) تطبيق : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 \in [3;4]$ و $u_{n+1} = 3 + \frac{1}{u_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

حدد نهاية المتتالية (u_n)

つづく