



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

**التمرين الأول : (3,0 ن)**

لدينا صندوقان  $U$  و  $V$ . الصندوق  $U$  يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء. الصندوق  $V$  يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية : " نسحب عشوائيا كرة من الصندوق  $U$  : إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق  $V$  ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق  $V$ . وإذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق  $V$  ".  
نعتبر الأحداث التالية :

- $R_1$  : " الكرة المسحوبة من  $U$  حمراء "
- $B_1$  : " الكرة المسحوبة من  $U$  زرقاء "
- $R_2$  : " الكرة المسحوبة من  $V$  حمراء "
- $B_2$  : " الكرة المسحوبة من  $V$  زرقاء "

- ① 1,00 ن أحسب احتمال الحدثين  $R_1$  و  $B_1$ .
- ② 1,00 ن أحسب احتمال  $B_2$  علما أن  $R_1$  محقق، و احتمال  $B_2$  علما أن  $B_1$  محقق.
- ③ 0,50 ن بين أن :  $P(B_2) = \frac{13}{21}$
- ④ 0,50 ن استنتج  $P(R_2)$ .

**التمرين الثاني : (4,5 ن)**

ليكن  $\theta$  عددا حقيقيا بحيث :  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و نضع :  $p = 5 \cos \theta + 3i \sin \theta$

نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$  التالية :  $(E) : z^2 - 2pz + 16 = 0$

① 0,50 ن (أ) تحقق أن :  $p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16$

② 0,50 ن (ب) أوجد  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E)$  بحيث :  $|z_1| < |z_2|$

② المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر النقطتين  $M_1$  و  $M_2$  اللتين لحقاهما على التوالي هما :  $z_2$  و  $z_1$ .

① 0,50 ن (أ) بين أنه عندما يتغير العدد  $\theta$  في  $[0; 2\pi[$  فإن النقطة  $M_1$  تتغير على دائرة  $(\mathcal{C})$  ينبغي تحديد معادلة لها.

② 0,50 ن (ب) لتكن  $P$  منتصف القطعة  $[M_1M_2]$ . و لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $P$  عندما يتغير العدد  $\theta$  في المجال  $[0; 2\pi[$

بين أن  $(\Gamma)$  إهليلج بؤرتاه هما النقطتان  $F$  و  $F'$  اللتان لحقاهما على التوالي هما 4 و -4.

0,50 ن ③ (أ) بين أنه لكل عددين عقديين  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{C} \setminus \{4\}$  لدينا :  $(ab = 16) \Leftrightarrow \left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right)$

0,50 ن (ب) استنتج أن :  $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$

0,50 ن (ج) بين أن :  $\left(\overline{M_1 F}; \overline{M_1 F'}\right) \equiv \pi + \left(\overline{M_2 F}; \overline{M_2 F'}\right) [2\pi]$

0,50 ن ④ (أ) بين أن معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\Gamma)$  في النقطة  $P$  هي :  $3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$

0,50 ن (ب) بين أن : المماس  $(T)$  عمودي على المستقيم  $(M_1 M_2)$ .

### التمرين الثالث : (3,0 ن)

لكل زوج  $(a, b)$  من  $\mathbb{Z}^2$  نعتبر المصفوفة :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$$

في  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  لتكن  $E$  مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي :

$$E = \{M_{(a,b)} / a^2 - 2b^2 = 1\}$$

0,25 ن ① نضع :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$  تحقق أن :  $A \in E$

0,50 ن ② (أ) بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$  و أن القانون  $\times$  تبادلي في  $E$ .

0,50 ن (ب) بين أن جميع عناصر  $E$  تقبل مقلوبا في  $E$  بالنسبة لقانون التركيب الداخلي  $\times$ .

0,50 ن (ج) بين أن  $(E, \times)$  زمرة تبادلية.

0,50 ن ③ نضع :  $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $A^{n+1} = A^n \times A$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

نعتبر المجموعة  $G = \{A^n / n \in \mathbb{N}\}$

0,25 ن (أ) تحقق أن :  $G \subset E$

0,50 ن (ب) لتكن  $H$  مجموعة مماثلات مصفوفات  $G$  بالنسبة لعملية  $\times$  في  $E$ .

بين أن :  $H = \{B^n / n \in \mathbb{N}\}$  حيث :  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

0,50 ن (ج) بين أن :  $G \cup H$  زمرة جزئية من  $(E, \times)$ .

### التمرين الرابع : (9,5 ن)

(I) ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$ . نعتبر الدالة العددية  $g_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$g_n(x) = x + e^{-nx}$$

و ليكن  $(\mathcal{E}_n)$  المنحنى الممثل للدالة  $g_n$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

0,50 ن ① (أ) أدرس تغيرات الدالة  $g_n$ .

0,50 ن (ب) بين أن  $g_n$  تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي  $u_n$  يتم تحديده بدلالة  $n$ .

0,50 ن ② (أ) أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$

٥,50 ن (ب) حدد الفرعين اللانهائين للمنحنى  $(\mathcal{E}_n)$

٥,50 ن (٣) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين  $(\mathcal{E}_1)$  و  $(\mathcal{E}_2)$  الممثلين للدالتين  $g_1$  و  $g_2$

٥,50 ن (ب) أرسم في نفس المعلم المنحنيين  $(\mathcal{E}_1)$  و  $(\mathcal{E}_2)$ .

( نأخذ :  $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2 \text{ cm}$  و نعطي :  $\ln 2 \approx 0,7$  )

١,00 ن (٤) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب بدلالة  $x$  التكامل :  $I(x) = \int_0^x t e^{-2t} dt$

٥,50 ن (ب) لتكن  $h_2$  قصور الدالة  $g_2$  على المجال  $[0, \ln 2]$

أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ  $h_2$  حول محور الأفاصيل.

١,00 ن (٥) نضع :  $v_n = g_n(u_n)$

بين أن المتتاليتين  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متقاربتان و حدد نهايتهما.

(II) نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f_n(x) = x + e^{nx}$

و ليكن  $(\Gamma_n)$  منحنى الدالة  $f_n$  في معلم متعامد ممنظم مباشر  $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$

٥,50 ن (١) أدرس تغيرات الدالة  $f_n$ .

٥,50 ن (٢) إستنتج أن المعادلة  $f_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$

٥,50 ن (٣) أ) بين أن  $\alpha_1 \in ]-\ln 2; \frac{-1}{2}[$

٥,50 ن (ب) بين أن :  $(x - \alpha_1)$  و  $(e^x + \alpha_1)$  لهما نفس الإشارة.

٥,50 ن (٤) أ) لتكن  $\varphi$  الدالة العددية المعرفة على  $]-\infty; \frac{-1}{2}[$  بما يلي :  $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

بين أن الدالة  $\varphi$  تناقصية على المجال  $]-\infty; \frac{-1}{2}[$

٥,50 ن (ب) استنتج أن :  $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$

(٥) نضع :  $\beta_0 = \frac{-1}{2}$  و لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  :  $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$

٥,50 ن (أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي  $a$  بحيث :  $|\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a|\beta_n - \alpha_1|$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

٥,50 ن (ب) بين أن المتتالية  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و حدد نهايتها.