

■ (I) ①

في البداية نلاحظ أن :  $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن  $M_{(a,b)}$  و  $M_{(c,d)}$  عنصرين من  $G$

إذن  $d \neq 0$  و  $b \neq 0$

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix} \text{ و منه :}$$

بما أن  $b \neq 0$  و  $d \neq 0$  فإن  $bd \neq 0$

و منه :  $(a+bc ; bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

يعني :  $M_{(a+bc, bd)} \in G$

و بالتالي  $G$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ (I) ②

لدينا  $\times$  تجميعي في  $(G, \times)$

لأن جزء مستقر من الزمرة  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

و لدينا كذلك  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  هو العنصر المحايد لـ  $\times$  في  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن  $I \in G$  فإن  $I$  هو نفسه العنصر المحايد لـ  $\times$  في  $G$  ( $I = M_{(0,1)}$ )

ليكن  $M_{(a,b)}$  عنصرا من  $G$ .

$M_{(a,b)}$  تقبل ممثالا (أو مقلوبا) في  $G$  بالنسبة لـ  $\times$

إذا فقط إذا كان :  $\det(M_{(a,b)}) \neq 0$

$$\det(M_{(a,b)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b - 0 = b \text{ لدينا :}$$

و بما أن :  $M_{(a,b)} \in G$  فإن :  $b \neq 0$

و منه :  $\det(M_{(a,b)}) \neq 0$

إذن :  $M_{(a,b)}$  تقبل مقلوبا في  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و نذكرُ بالعلاقة المهمة التالية :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$M_{(a,b)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M_{(a,b)}} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \text{ إذن :}$$

$$= \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$$

و بما أن :  $b \neq 0$  فإن :  $\frac{1}{b} \neq 0$

و منه :  $M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \in G$  أي :  $M_{(a,b)}^{-1} \in G$

إذن : كل مصفوفة  $M_{(a,b)}$  من  $G$  تقبل ممثالا  $M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)}$  في  $G$  بالنسبة لـ  $\times$

نختار المصفوفتين  $M_{(1,1)}$  و  $M_{(2,2)}$  من  $G$  لكي نبين أن  $\times$  ليس تبادليا في  $G$

$$M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ لدينا :}$$

$$M_{(2,2)} \times M_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ و}$$

نلاحظ أن :  $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} \neq M_{(2,2)} \times M_{(1,1)}$

إذن  $\times$  ليس تبادليا في  $G$ .

خلاصة :  $(G, \times)$  زمرة غير تبادلية.

■ (I) ③

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين .

لدينا :  $\mathcal{H} = \{M_{(a,b)} \in G \mid b > 0\}$

لدينا حسب ما سبق  $I = M_{(0,1)} \in G$

و بما أن  $1 > 0$  فإن  $M_{(0,1)} \in \mathcal{H}$

و منه :  $\mathcal{H}$  جزء غير فارغ من  $G$

ليكن  $M_{(a,b)}$  و  $M_{(c,d)}$  عنصرين من  $\mathcal{H}$

لدينا حسب ما سبق :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = M_{(a,b)} \times M_{\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix}$$

بما أن  $d > 0$  و  $b > 0$  فإن :  $\frac{b}{d} > 0$

و منه :

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a - \frac{bc}{d} & \frac{b}{d} \end{pmatrix} = M_{\left(\frac{a - \frac{bc}{d}}{\frac{b}{d}}, \frac{b}{d}\right)} \in \mathcal{H}$$

و بالتالي نستنتج أن  $(\mathcal{H}, \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(G, \times)$ .

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين.

$$(*) \quad M_{(a,1)} \times M_{(b,1)} = M_{(a+b,1)} \quad \text{لدينا}$$

إذن باستعمال العلاقة (\*) نحصل على :

$$M_{(a_1,1)} \times M_{(a_2,1)} \times \cdots \times M_{(a_n,1)} = M_{((\sum_{i=1}^n a_i),1)}$$

$$M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)} = M_{(na,1)} \quad \text{و منه}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; (M_{(a,1)})^n = M_{(na,1)} \quad \text{و بالتالي}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \quad \text{يعني}$$

و إن لم تكن هذه الطريقة مقنعة بما فيه الكفاية فعليك بالترجع :

## 1 (II) ■

لنكن  $M_{(a,b)}$  و  $M_{(c,d)}$  مصفوفتين من  $G$ .

$$M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc, bd)} \quad \text{لدينا}$$

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a+bc, bd)}) = (a+bc, bd) \quad \text{و منه}$$

و لدينا كذلك :

$$\varphi(M_{(a,b)}) \top \varphi(M_{(c,d)}) = (a, b) \top (c, d) = (a+bc ; bd)$$

و بالتالي :

$$\varphi(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}) = \varphi(M_{(a,b)}) \top \varphi(M_{(c,d)})$$

و منه  $\varphi$  تشاكل من  $(G, \times)$  نحو  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ .

ليكن  $(c, d)$  عنصرا من  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

$$\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d) \quad \text{لنحل المعادلة}$$

$$(x, y) = (c, d) \quad \text{التي تكافئ}$$

$$y = d \quad \text{و منه} \quad x = c$$

إذن المعادلة  $\varphi(M_{(x,y)}) = (c, d)$  تقبل حلا وحيدا في

$G$  و هو المصفوفة  $M_{(c,d)}$ .

و منه  $G$  تقابل من  $(G, \times)$  نحو  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ .

خلاصة : تشاكل تقابلي من  $(G, \times)$  نحو  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ .

## 2 (II) ■

رأينا أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(G, \times)$  نحو  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$

و نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

إذن نستنتج بنية  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$  انطلاقا من بنية  $(G, \times)$  عن طريق التطبيق  $\varphi$

بما أن  $(G, \times)$  زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون  $\times$  هو

المصفوفة  $M_{(0,1)}$  و أن كل مصفوفة  $M_{(a,b)}$  من  $G$  تقبل مماثلا

$$M_{\left(\frac{-a}{b}, \frac{1}{b}\right)} \quad \text{في } G \text{ بالقانون } \times .$$

فإن  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$  زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون  $\top$

هو  $\varphi(M_{(0,1)})$  و أن كل زوج  $(c, d)$  من  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  يقبل مماثلا

$$M_{\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)} \quad \text{في } G \text{ بالقانون } \top .$$

إذن :  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$  زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد  $(0,1)$  و

كل عنصر  $(c, d)$  يقبل مماثلا و هو  $M_{\left(\frac{-c}{d}, \frac{1}{d}\right)}$ .

## 3 (II) ■

$\varphi$  تشاكل .

تعريف التطبيق  $\varphi$

$$(M_{(a,1)})^n = M_{(na,1)}$$

$\top$  هو مماثل  $(c, d)$  بالنسبة لـ  $\top$

باستعمال الأدوات التالية :

$$(a, 1) \top \cdots \top (a, 1) = (-na, 1) \quad \text{نبرهن بكل بساطة على أن}$$

$$[(a, 1) \top (a, 1) \top \cdots \top (a, 1)]' \quad \text{لدينا} \quad \text{_____}$$

$$= [\varphi(M_{(a,1)}) \top \varphi(M_{(a,1)}) \top \cdots \top \varphi(M_{(a,1)})]'$$

$$= [\varphi(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)})]'$$

$$= [\varphi((M_{(a,1)})^n)]'$$

$$= [\varphi(M_{(na,1)})]'$$

$$= \left(\frac{-na}{1}; \frac{1}{1}\right)$$

$$= (-na; 1)$$

1 أ

لدينا :  $(x, y)$  حل للمعادلة (E)

يعني :  $x^2(x + y) = y^2(x - y)^2$

يعني :  $(ad)^2(ad + bd) = (bd)^2(ad - bd)^2$

يعني :  $a^2d^3(a + b) = b^2d^3(a - b)^2d$

نختزل بالعدد  $d^3 \neq 0$  لأن

نحصل على :  $a^2(a + b) = db^2(a - b)^2$

1 ب

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى أربع أدوات :

الأداة الأولى :  $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^n = 1 ; \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$

الأداة الثانية : (Gauss)  $\begin{cases} a/bc \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a/b$

الأداة الثالثة : (Bezout)

$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 ; ma + nb = d$

الأداة الرابعة :  $\begin{cases} a/b \\ a/c \end{cases} \Rightarrow \forall (m, n) \in \mathbb{Z} ; a/(mb + nc)$

ننطلق من كون  $(x, y)$  حل للمعادلة (E)

لدينا :  $d = x \wedge y$

إذن حسب (Bezout) المباشرة :  $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; xu + yv = d$ 

و منه :  $adu + bdv = d$

نختزل بالعدد الغير المنعدم  $d$  نحصل على :  $au + bv = 1$ 

و منه حسب (Bezout) العكسية :  $a \wedge b = 1$

إذن حسب الأداة الأولى :  $(*) a^2 \wedge b = 1$

بما أن الزوج  $(x, y)$  حل للمعادلة (E) فإنه حسب السؤال (أ)

$db^2(a - b)^2 = (a + b)a^2$

نضع :  $k = bd(a - b)^2$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

إذن :  $(a + b)a^2 = kb$  و منه :  $b / (a + b)a^2$

و بما أن :  $a^2 \wedge b = 1$  حسب النتيجة (\*) فإنه

حسب (Gauss) :  $b / (a + b)$

و نعلم أن  $b / (-b)$  إذن حسب الأداة الرابعة :

(1)  $b / a$  يعني  $b / (a + b - b)$

و نعلم حسب ما سبق أن : (2)  $a \wedge b = 1$

من (1) و (2) نستنتج أن :  $b = 1$

1 ج

نفترض أن :  $a = 1$ لدينا :  $b = 1$  إذن :  $x = d$  و  $y = d$  .بما أن  $(x, y)$  حل للمعادلة (E) فإن :  $d^2(d + d) = d^2(d - d)^2$ يعني :  $d = 0$  و هذا تناقض لأن  $d = x \wedge y \neq 0$ و بالتالي :  $a \neq 1$  .

لدينا :  $a - (a - 1) = 1$

إذن :  $(\exists u, v \in \mathbb{Z}) ; au + (a - 1)v = 1$

و في هذه الحالة لدينا :  $u = 1$  و  $v = -1$ 

و منه حسب (Bezout) :  $a \wedge (a - 1) = 1$

إذن حسب الأداة الأولى نستنتج أن :  $(**) a^2 \wedge (a - 1) = 1$

لدينا من جهة أخرى  $b = 1$  إذن حسب السؤال (أ)

$(a + 1)a^2 = d(a - 1)^2$

نضع :  $k = d(a - 1)$  بحيث  $k \in \mathbb{Z}$

إذن :  $(a + 1)a^2 = k(a - 1)$  و منه :  $(a - 1) / (a + 1)a^2$

من العلاقة (\*\*\*) نستنتج حسب (Gauss) :  $(a - 1) / (a + 1)$ 

1 د

لدينا :  $(a - 1) / (a + 1)$  يعني :  $a \equiv -1[a - 1]$

و نعلم أن :  $(a \equiv 1[a - 1])$  (لأن  $(a - 1) / (a - 1)$ )

إذن :  $1 \equiv -1[a - 1]$  يعني :  $2 \equiv 0[a - 1]$

و منه :  $(a - 1) / 2$

القواسم الصحيحة الطبيعية لـ 2 هي 1 و 2

إذن :  $a - 1 = 1$  أو  $a - 1 = 2$

يعني :  $a = 2$  أو  $a = 3$

و نبرهن بكل بساطة على أنه :

إذا كان :  $a = 2$  فإن  $(x, y)$  يحقق المعادلة (E) .و إذا كان :  $a = 3$  فإن  $(x, y)$  يحقق كذلك المعادلة (E) .

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-3)^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2} = -1$$

إن:  $(\mathcal{H})$  هذلول مركزه النقطة  $C(1,0)$  ورأساه هما  $B(1; 3 + 2\sqrt{2})$  و  $B(1; 3 - 2\sqrt{2})$  و مقارباها هما المستقيمان  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  المعرفين بما يلي:

$$(\Delta): y - 3 = x - 1 \quad \text{و} \quad (\Delta'): y - 3 = 1 - x$$

$$\text{يعني: } (\Delta): y = x + 2 \quad \text{و} \quad (\Delta'): y = 4 - x$$

■ (I) ③

الزوج  $(0,0)$  يحقق معادلة المجموعة  $(\mathcal{H})$ .

$$\text{لأن: } 0^2 - 0^2 - 2 \times 0 + 6 \times 0 = 0 \quad \text{إن: } 0 \in (\mathcal{H})$$

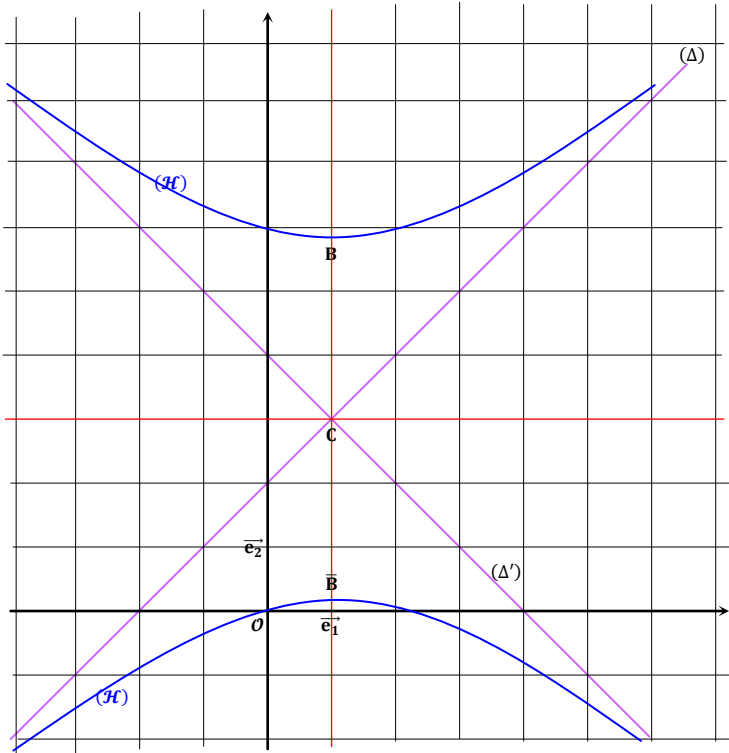
نعلم أن معادلة المماس  $(T_O)$  للهذلول  $(\mathcal{H})$  في النقطة  $O$  تكتب على الشكل:

$$(T_O): xx_0 - yy_0 = (x + x_0) - 3(y + y_0)$$

$$\text{حيث: } x_0 = 0 \quad \text{و} \quad y_0 = 0$$

$$\text{ومنه: } (T_O): x - 3y = 0$$

■ (I) ④



لنحل المعادلة (E)

الحالة الأولى: إذا كان:  $(a, b) = (2, 1)$

إن:  $(x, y) = (2d, d)$

$$\text{ومنه: } (E): (2d)^2(2d + d) = d^2 d^2$$

$$\text{يعني: } (4d^2)(3d) = d^4 \quad \text{أي: } d = 12$$

وبالتالي:  $(x, y) = (24, 12)$

الحالة الثانية: إذا كان:  $(a, b) = (3, 1)$

إن:  $(x, y) = (3d, d)$

$$\text{ومنه: } (E): (3d)^2(3d + d) = d^2(2d)^2$$

$$\text{يعني: } 36d^3 = 4d^4 \quad \text{أي: } d = 9$$

وبالتالي:  $(x, y) = (27, 9)$

خلاصة: الزوجان  $(24, 12)$  و  $(27, 9)$  هما حلا المعادلة (E).

التمرين الثالث: (5,0 ن)

■ (I) ①

نضع:  $z = x + iy$  و  $M$  هي صورة العدد العقدي  $z$

بحيث:  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين.

$$\text{لدينا: } P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (x + iy)^2 - (2 + 6i)(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - (2x + 2iy + 6ix - 6y)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - 2x - 2iy - 6ix + 6y$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (x^2 - y^2 - 2x + 6y) + i(2xy - 2y - 6x)$$

و لدينا  $P(z)$  عدد تخيلي صرف.

$$\text{إن: } \Re(P(z)) = 0$$

$$\text{يعني: } x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$$

ومنه:  $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$  هي معادلة ديكارتية مميزة للنقط  $M(z)$  التي يكون من أجلها  $P(z)$  عددا تخيليا.

■ (I) ②

في المعلم  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  المجموعة  $(\mathcal{H})$  تتميز بالمعادلة:

$$(x^2 - y^2 - 2x + 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) - (y^2 - 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = -8$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow u = \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow u = \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

لدينا :  $\sin(\alpha) \approx 0,19 \neq 0$

إذن :  $\arg(u) \equiv \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) [2\pi]$

بنفس الطريقة لدينا :  $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$

$$\Leftrightarrow 239 = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow 239 - i = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} - i$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\cos(\beta) - i\sin(\beta)}{\sin(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \left(\frac{1}{\sin(\beta)}\right) (\cos(-\beta) + i\sin(-\beta))$$

$$\Leftrightarrow \omega = \left(\frac{1}{\sin(\beta)}\right) e^{-\beta i}$$

$$\Leftrightarrow \arg(\omega) = -\beta [2\pi]$$

■ (II) 2 (ج)

أشير في البداية إلى أن  $(1 + i) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \arg(v) = \arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

و لدينا حسب السؤال (ج)  $u^4 \times v = \omega$

$$\Rightarrow \arg(u^4 \times v) \equiv \arg(\omega) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\arg(u) + \arg(v) \equiv \arg(\omega) [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta [2\pi]$$

$$\Rightarrow 4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

■ (II) 1

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $P(z) = 4 - 6i$

$$\Leftrightarrow z^2 - (2 + 6i)z + (6i - 4) = 0$$

لدينا :  $\Delta = (2 + 6i)^2 - 4(6i - 4)$   
 $= (4i)^2$

إذن :  $z_1 = \frac{(2 + 6i) + 4i}{2} = 1 + 5i$

و  $z_2 = \frac{(2 + 6i) - 4i}{2} = 1 + i$

■ (II) 2 (د)

لدينا  $u = 1 + 5i$  و  $v = 1 + i$  و  $\omega = 239 - i$

لدينا حسب مثلث (Pascal)

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \quad (a + b)^4$$

إذن :

$$u^4 = (1 + 5i)^4 = 1^4 + 4(5i) + 6(5i)^2 + 4(5i)^3 + (5i)^4$$

$$\Leftrightarrow u^4 = 1 + 20i - 150 - 500i + 625$$

$$\Leftrightarrow u^4 = 476 - 480i$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = (476 - 480i)(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 476 + 476i - 480i + 480$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 956 - 4i$$

$$\Leftrightarrow u^4 \times v = 4(239 - i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u^4 \times v = 4\omega}$$

■ (II) 2 (ب)

لدينا :  $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow 5 = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 5i = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} i \quad \Leftrightarrow \boxed{1 + 5i = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} i + 1}$$

2 ■

نضع :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; h(x) = \sqrt{x} - \ln x$

$$h'(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - \ln x\right)'$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{x - 4}{2x(\sqrt{x} + 2)}$$

ولدينا :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{1}{2x(\sqrt{x} + 2)} > 0$

إذن إشارة  $h'(x)$  متعلقة بإشارة  $(x - 4)$ .

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$

و :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

$x$	0	4	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
$h$	$+\infty$	$2 - \ln 4$	$+\infty$

انطلاقاً من هذا الجدول نلاحظ أن قيمة دنوية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}_+^*$

يعني أن :  $(\forall x > 0) ; h(x) > 2 - \ln 4$

ولدينا :  $2 - \ln 4 \approx 0,6 > 0$

إذن :  $\forall x > 0 ; h(x) > 0$

و منه :  $\forall x > 0 ; \sqrt{x} > \ln x$

3 (i) ■

لدينا  $g_n$  دالة متصلة و تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$ .

إذن  $g_n$  تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو  $]0, +\infty[$

ولدينا :  $g_n(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \right[$   
 $= ]-\infty ; +\infty[ = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

نستعين بالآلة الحاسبة و نضبط وحدة قياس الزوايا على الراديان .

لدينا :  $\alpha \approx 0,2 \text{ rad}$  و  $\beta \approx 0,004 \text{ rad}$

و نلاحظ أن :  $0 < \alpha < 1$  و  $0 < \beta < 1$

و من هذين التأييرين نحصل على :  $-1 < 4\alpha - \beta < 4$

أي :  $-1 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 4$

و منه :  $-0,3 < k < 0,5$

إذن :  $k = 0$

و بالتالي :  $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

$$4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي :}$$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

1 ■

لدينا :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; g_n(x) = nx + 2\ln x$

$g_n$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$  و هما  $x \rightarrow nx$  و  $x \rightarrow 2\ln x$ .

ولدينا :  $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx + 2}{x} > 0$

إذن  $g_n$  دالة تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}_+^*$ .

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$

$x$	0	$+\infty$
$g_n'(x)$		+
$g_n$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x} \right) \quad \text{② (I) ■}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} \right) \times \left( \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \right) \\ &= \left( \frac{1}{+\infty} \right) \times \left( \frac{1}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned}$$

إذن: (ℰ) يقبل مقاربا أفقيا بجوار  $+\infty$  و هو محور الأفصيل.

③ (I) ■

ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{R}_+^*$ .

لدينا:  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-x} - e^{-x} x^{\frac{1}{3}} \quad \text{إذن:}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left( \frac{1}{3} x^{-1} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left( \frac{1}{3x} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x^{\frac{1}{3}} e^{-x}) \left( \frac{1-3x}{3x} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left( \frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$$

③ (I) ■

$$f'(x) = \left( \frac{1-3x}{3x} \right) f(x) \quad \text{لدينا:}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-x} > 0 \quad \text{بما أن:}$$

$$(\forall x > 0) ; x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln x} > 0 \quad \text{و } 3x > 0$$

فإن إشارة  $f'(x)$  متعلقة بـ  $(1-3x)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{إذا كان } x = \frac{1}{3} \quad \text{فإن:}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{إذا كان } x > \frac{1}{3} \quad \text{فإن:}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{إذا كان } x < \frac{1}{3} \quad \text{فإن:}$$

و لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$x$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f$	0	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	0

من جهة أخرى لدينا:  $\left] \frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[ \subset \mathbb{R}_+^*$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2\ln(n) \quad \text{و لدينا كذلك:}$$

$$1 - 2\ln(n) \leq 1 - 2\ln 3 \quad \text{علما أن } n \geq 3 \quad \text{نستنتج أن:}$$

$$1 - 2\ln(n) < 0 \quad \text{إذن: } 1 - 2\ln 3 \approx -1,2 \quad \text{لدينا}$$

$$(1) \quad g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{ومنه:}$$

و لدينا كذلك:

$$\begin{aligned} g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sqrt{n} - \ln(n) \end{aligned}$$

بما أن  $n > 0$  فإنه حسب السؤال ②  $\sqrt{n} > \ln(n)$

$$(2) \quad g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0 \quad \text{ومنه: } \sqrt{n} - \ln(n) > 0 \quad \text{يعني}$$

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times g_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج أن:}$$

نتوفر الآن على جميع الشروط اللازمة لتطبيق مبرهنة القيم الوسيطة.

$$\exists! \alpha_n \in \left] \frac{1}{n}; \frac{1}{\sqrt{n}} \right[ \quad / \quad g_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن:}$$

ومنه: المعادلة  $g_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في  $\mathbb{R}_+^*$ .

③ (I) ■

$$\begin{cases} \frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 0 \quad \text{إذن:}$$

الجزء الثاني

① (I) ■

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sqrt[3]{x} e^{-x}}{x} \right) \quad \text{لدينا:} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} e^x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

إذن  $f$  غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

نستنتج أن (ℰ) يقبل مماسا رأسي موجهها نحو الأعلى في الصفر.

لدينا :  $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$  أي :  $x \geq \frac{1}{3}$

ومنه :  $x > \frac{1}{5}$  يعني :  $5x > 1$

يعني :  $3x + 2x > 1$

يعني :  $2x > 1 - 3x$

(\*) يعني :  $2 > \frac{1 - 3x}{x}$

ولدينا :  $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$  أي :  $x \leq 1$

ومنه :  $1 - x \geq 0$  يعني :  $1 - 3x + 2x \geq 0$

يعني :  $1 - 3x \geq -2x$

(\*\*) يعني :  $\frac{1 - 3x}{x} \geq -2$

من (\*) و (\*\*) نستنتج أن :  $-2 \leq \frac{1 - 3x}{x} < 2$

أي : (2)  $\left| \frac{1 - 3x}{x} \right| \leq 2$

لدينا :  $f'(x) = \left(\frac{1 - 3x}{3x}\right) f(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 3x}{x}\right) f(x)$

$\Rightarrow |f'(x)| = \frac{1}{3} \left| \frac{1 - 3x}{x} \right| |f(x)|$

من (1) و (2) نجد :  $|f(x)| < 1$  و  $\left| \frac{1 - 3x}{x} \right| \leq 2$

ومنه :  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

■ (1)(II) ج

ليكن  $x$  عددا حقيقيا موجبا قطعيا

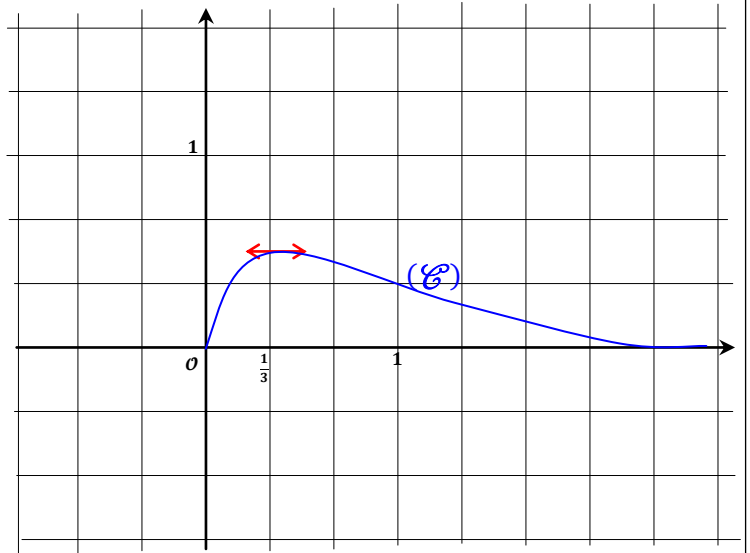
لدينا :  $f(x) = x$  يعني :  $\sqrt[3]{xe^{-x}} = x$

إذن :  $xe^{-3x} = x^3$

نختزل بالعدد الغير المنعدم  $x$  نحصل على :  $e^{-3x} = x^2$

ندخل الدالة  $\ln$  على هاتين الكميتين الموجبتين نحصل على :  $-3x = 2 \ln x$

■ (I) 4



■ (II) 1 (i)

لدينا :  $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

ليكن :  $y \in f(I)$

هذا يعني أن :  $f(x) = y$  ;  $(\exists x \in I)$

لدينا :  $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$  و  $f$  دالة تناقصية على  $I$

إذن :  $f\left(\frac{1}{3}\right) \geq f(x) \geq f(1)$

أي :  $0,5 \geq y \geq 0,36$

ومنه :  $1 > 0,5 \geq y > 0,36 \geq \frac{1}{3}$

إذن :  $1 \geq y \geq \frac{1}{3}$

ومنه :  $y \in I$

حصلنا إذن على الإستلزام التالي :  $y \in f(I) \Rightarrow y \in I$

وبالتالي :  $f(I) \subset I$

■ (II) 1 (ب)

لدينا :  $f'(x) = \left(\frac{1 - 3x}{3x}\right) f(x)$  ;  $(\forall x > 0)$

ليكن  $x$  عنصرا من  $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$  إذن :  $x \geq \frac{1}{3}$

ومنه :  $f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right)$  لأن  $f$  تناقصية على المجال  $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

يعني :  $f(x) \leq 0,5 < 1$

ومنه :  $f(x) < 1$

إذن : (1)  $|f(x)| < 1$



$$|f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \text{ : يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \text{ إذن}$$

■ (II) 2 (ج)

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا.

لدينا حسب السؤال (ب)

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha_3| &\leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) |u_{n-2} - \alpha_3| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) |u_{n-3} - \alpha_3| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_{n-n} - \alpha_3| \end{aligned}$$

$$(*) (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \text{ إذن}$$

$$\frac{1}{3} \leq \alpha_3 \leq 1 \text{ : يعني } \alpha_3 \in I \text{ لدينا}$$

$$\left| \frac{1}{3} - \alpha_3 \right| \leq \frac{2}{3} \text{ : أي } \frac{-2}{3} \leq \frac{1}{3} - \alpha_3 \leq \frac{2}{3} \text{ : ومنه}$$

$$|u_0 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} \text{ : يعني}$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  نحصل على :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3| \text{ ونعلم أن}$$

وذلك حسب : (\*)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ وبالتالي}$$

$$g_3(x) = 0 \text{ : يعني } 3x + 2\ln x = 0 \text{ ومنه}$$

ونعلم حسب السؤال (3) (i) من الجزء الأول أن المعادلة  $g_n(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في  $\mathbb{R}_+^*$  بحيث :  $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\text{إذن : } x = \alpha_3 \text{ بحيث : } \frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

■ (II) 2 (i)

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا.

نبرهن بالترجع على أن :  $u_n \in I$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ لدينا : } u_0 = \frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{3}; 1\right] = I$$

إذن :  $u_0 \in I$

نفترض أن :  $u_n \in I$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

بما أن  $f$  متصلة على المجال  $I$ .

فإن :  $u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in f(I)$

و نعلم أن :  $f(I) \subset I$  وذلك حسب السؤال (1) (i)

إذن :  $f(u_n) \in f(I) \subset I$

ومنه :  $u_{n+1} \in I$

وبالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$

■ (II) 2 (ب)

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا.

$$(1) (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I \text{ لدينا}$$

$$\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ : (ج) حسب نتيجة السؤال (3) (i)}$$

$$(2) \alpha_3 \in I \text{ إذن}$$

من (1) و (2) نستنتج أن :  $[u_n; \alpha_3] \subset I$

و بما أن  $f$  دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على  $I$ .

فإن  $f$  دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على :  $[u_n; \alpha_3]$  كذلك

ومنه : حسب مبرهنة التزايد المتنتهية :

$$\exists c \in ]u_n, \alpha_3[ ; \frac{f(u_n) - f(\alpha_3)}{u_n - \alpha_3} = f'(c)$$

$$\text{ومنه : } |f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq |f'(c)| \times |u_n - \alpha_3|$$

$$\text{وبما أن : } |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \text{ (ب) حسب السؤال (3) (i)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |f'(c)| |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \text{ فإن}$$

■ (III) 1 (ب)

ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{R}_+^*$

لدينا :  $F(x) = h(8x) - h(x)$

إذن :  $F'(x) = 8h'(8x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 8\sqrt[3]{8x} e^{-8x} - \sqrt[3]{x} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x})(e^{-7x}) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = (16e^{-7x} - 1)f(x)$$

و بما أن  $\forall x \in [0, +\infty[ ; f(x) \geq 0$

فإن إشارة  $F'(x)$  متعلقة فقط بإشارة  $(16e^{-7x} - 1)$

إذا كان :  $x = \frac{\ln 16}{7}$  فإن :  $F'(x) = 0$

إذا كان :  $x > \frac{\ln 16}{7}$  فإن :  $F'(x) < 0$

إذا كان :  $x < \frac{\ln 16}{7}$  فإن :  $F'(x) > 0$

و بالتالي :  $F$  دالة تزايدية على  $\left[0, \frac{\ln 16}{7}\right]$  و تناقصية على  $\left[\frac{\ln 16}{7}, +\infty\right[$

■ (III) 2 (أ)

ليكن  $x$  و  $t$  عددين حقيقيين موجبين بحيث :  $x \leq t \leq 8x$

بما أن  $f$  دالة موجبة على :  $[0, +\infty[$

فإن  $F$  دالة موجبة كذلك لأنها تكامل لدالة موجبة  $f$ .

و منه :  $F(x) \geq 0$  (1)

ننطلق من الكتابة  $t \leq 8x$  إذن :  $t^{\frac{1}{3}} \leq (8x)^{\frac{1}{3}}$

نضرب طرفي المتفاوتة الأخيرة في العدد الموجب و الغير المنعدم  $e^{-t}$

نحصل على :  $e^{-t} t^{\frac{1}{3}} \leq e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}}$

بإدخال التكامل على طرفي هذه المتفاوتة نحصل على :

$$\int_x^{8x} e^{-t} t^{\frac{1}{3}} dt \leq \int_x^{8x} e^{-t} (8x)^{\frac{1}{3}} dt$$

■ (II) 2 (د)

لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3$

بما أن :  $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$  متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و -1 فإن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$$

و منه :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3\right) = \alpha_3$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha_3$

■ (III) 1 (أ)

لدينا  $f$  دالة متصلة على  $[0, +\infty[$

إذن :  $f$  متصلة على المجال  $[0, x]$  كيفما كان  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$ .

و منه :  $f$  تقبل دالة أصلية  $h$  على المجال  $[0, x]$ .

يعني :  $h$  قابلة للإشتقاق على  $[0, x]$  بحيث :  $h'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{8x} f(t) dt \quad \text{و لدينا} \\ &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{8x} f(t) dt \\ &= \int_0^{8x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \\ &= h(8x) - h(0) - h(x) + h(0) \\ &= h(8x) - h(x) \end{aligned}$$

لدينا :  $x > 0$  يعني :  $8x > 0$

و منه :  $x \rightarrow h(8x)$  قابلة للإشتقاق على :  $[0, +\infty[$

لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على :  $[0, +\infty[$

و بالتالي :  $F$  قابلة للإشتقاق على  $[0, +\infty[$  لأنها مجموع

دالتين قابلتين للإشتقاق على  $[0, +\infty[$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq (8x)^{\frac{1}{3}} \int_x^{8x} e^{-t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} [-e^{-t}]_x^{8x}$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} (-e^{-8x} + e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}} e^{-x} (1 - e^{-7x})$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x}) \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 0) ; 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$$

■ (III) 2 (ب)

ننطلق من التأيير :  $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$  (Evidente)

و لدينا حسب جدول تغيرات  $f$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0$

و بالتالي :

$$0 \leq \underbrace{F(x)}_{\substack{\nearrow \\ +\infty}} \leq \underbrace{2f(x)}_{\substack{\nearrow \\ +\infty}} \underbrace{(1 - e^{-7x})}_{\substack{\nearrow \\ +\infty}}$$

أي :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

■ (III) 2 (ج)

نلخص النتائج التي تم التوصل إليها بخصوص الدالة  $F$  في الجدول التالي :

$x$	0	$\frac{\ln 16}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$		0	
$F$	0	$F\left(\frac{\ln 16}{7}\right)$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■