استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

(I) ليكن $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

0,25 ن ① أ) تحقق أن لكل زوج (a,b) من $\mathbb{E}^2$: $a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

0,25 ن ب) استنتج ان $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

0,50 ن ② بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

(II) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها : $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

و نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $a\epsilon E$; $\mathrm{M}(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}$

0,50 ن ① أ) نضع : $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ تحقق أن : $A^2=-2A$ و أن : $M(a)=1+\frac{a}{\sqrt{2}}A$.

0,50 ن ب) بين أن F جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

② نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned}\varphi:\ (\mathrm{E},\perp) &\longrightarrow (\mathrm{F},\times)\\ a &\longrightarrow \varphi(a)=\mathrm{M}(a)\end{aligned}$$

0,50 ن أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن ب) استنتج بنية $(F,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$

0,25 ن (I) ① أ) تحقق أن العدد العقدي $u=a+i$ حل للمعادلة $(E):\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$.

0,25 ن ب) حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) .

② نفترض أن $|a|=1$.

0,25 ن أ) بين أن : $\frac{u}{v}\epsilon\mathbb{R}$

0,25 ن ب) تحقق أن : $u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$

0,50 ن ج) استنتج أن : $arg(u)=\frac{1}{2}arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$

0,50 ن ③ بين أن $|u|+|v|\geq 2$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث :

$|u|+|v|=m$

0,50 ن ① بين أن (E_m) إهليلج مركزه أصل المعلم O .

② نضع : $a=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

0,25 ن ⓐ بين أن : $x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) .

0,25 ن ⓑ أنشىء الإهليلج (E_4) .

0,50 ن ③ نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رَأْسَيْ الإهليلج (E_4) . بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر المعادلة : $(E)\ :195x-232y=1$.

0,50 ن ① ⓐ حدد $195\wedge 132$.

0,50 ن ⓑ بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(163+232k\,;137+195k)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$

0,25 ن ⓒ أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0\le d\le 232$ و $195d\equiv 1[232]$.

0,25 ن ② بين أن العدد 233 عدد أولي.

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233.

نقبل أن : $a^{232}\equiv 1[233]\ \ ;\ \ \forall a\epsilon A\setminus\{0\}$.

0,50 ن ⓐ بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن : $a=b$.

0,50 ن ⓑ ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a)=b$. حدد a بدلالة b .

0,50 ن ⓒ استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع : (10,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^x$.

0,50 ن (I) ① بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\ge 0$.

0,25 ن ② بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $g(x)=0$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x+1} & ;\ \forall x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن ① أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$

0,25 ن ② بين أن الدالة f متصلة في 0.

0,50 ن ③ ⓐ أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن ⓑ إستنتج تغيرات الدالة f .

④ نعتبر التكامل : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي .

0,50 ن ⓐ باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^x-1-x)$.

1,00 ن ⓑ بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$

ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-\|x\|}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+\|x\|}{2}}$	0,50 ن
د) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0) = \frac{-1}{2}$.	0,75 ن
5) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)}(e^x(x-1)+2+x)$	0,50 ن
ب) أدرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.	0,50 ن
ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$.	0,25 ن
د) أنشىء $(\mathscr{C})$	0,50 ن
(III) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$	
1) بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$	0,25 ن
2) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\|f'(x)\| \leq \frac{1}{2}$.	0,50 ن
ب) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\|u_{n+1} - \ln 2\| \leq \frac{1}{2}\|u_n - \ln 2\|$	0,50 ن
ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.	0,50 ن
(IV) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}dt \ ; \ \ \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$	
1) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$	0,50 ن
ب) بين أن الدالة F متصلة في 0.	0,25 ن
ج) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$.	0,50 ن
2) أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$	0,50 ن
ب) أدرس تغيرات الدالة F .	0,25 ن